

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوالها: ۷

پاییز ۱۳۹۸

ریاضی عمومی ۱

تمرین‌های سری هفتم

(۱) سوال ۲ صفحه ۱۵۴ کتاب دکتر شهشهانی) در مورد هر یک از تابع‌های زیر دامنه تعریف و نقاطی را که مشتق‌های اول و دوم وجود دارد تعیین کنید، سپس با توجه به علامت مشتق‌های اول و دوم، نمودار تابع را رسم کنید.

(ت) $f(x) = x^{n+1} - x^n$ (n عددی طبیعی است)

(ج) $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ($n \geq 2$ عددی طبیعی است).

(۲) سوال ۱۱ صفحه ۱۵۵ کتاب دکتر شهشهانی) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر است که $f(0) = 0$ و $f''(x) > 0$ برای هر x تابع $g:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید g در $]0, \infty[$ اکیدا صعودی است.

(۳) سوال ۵ صفحه ۱۶۳ کتاب دکتر شهشهانی) کپسول گازی به شکل استوانه با سقف نیمکره است. نسبت ارتفاع استوانه به شعاع نیمکره چگونه اختیار شود تا با حجم داده شده، حداقل مصالح در ساخت کپسول به کار گرفته شود؟

(۴) سوال ۱ صفحه ۱۷۶ از کتاب دکتر شهشهانی) تابع f را فرد (زوج) می‌نامیم، در صورتی که دامنه آن نسبت به صفر متقارن باشد و به ازای هر x ,

$$(f(-x) = f(x)) \quad f(-x) = -f(x)$$

ثابت کنید که در چندجمله‌ای تیلور هر تابع فرد حول ۰ ضریب جمله‌های درجه زوج صفر است و در چندجمله‌ای تیلور هر تابع زوج حول ۰، ضریب جمله‌های درجه فرد صفر است.

(۵) سوال ۴ صفحه ۱۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید p عددی طبیعی باشد. ثابت کنید مجموع $1^p + 2^p + \dots + n^p$ یک چندجمله‌ای بر حسب n است که در آن $\frac{n^{p+1}}{p+1}$ جمله‌ای است که درجه‌اش از

بقیه بیشتر است. (راهنمایی: می‌توانید با استفاده از دستور بسط دوجمله‌ای، $(j+1)^p - j^p$ را بسط دهید و سپس $\sum_{j=0}^n ((j+1)^p - j^p)$ را حساب کنید.)

(۶) (سوال ۵ صفحه ۱۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) ثابت کنید که اگر p عددی طبیعی باشد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \left(\sqrt[p]{\frac{1}{n}} + \sqrt[p]{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt[p]{\frac{n}{n}} \right) \right) = \frac{p}{p+1}.$$

(راهنمایی: از نتیجه مثال ۷ استفاده کنید.)

(۷) (سوال ۱۰ صفحه ۱۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) تابع g را به صورت

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \\ 0 & x \notin \left\{1, \frac{1}{2}, \dots\right\} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید g روی $[0,1]$ انتگرال پذیر است و $\int_0^1 g = 0$.