

تمرین‌های ریاضی عمومی یک

سری ششم

۱۷ آبان ۱۳۹۷

تمرین ۱: فرض کنید f روی $[0, 1]$ پیوسته و روی $(0, 1)$ مشتق‌پذیر باشد. همچنین فرض کنید $f(0) = 0$ و برای هر $x \in (0, 1)$ داشته باشیم، $f(x) > 0$. ثابت کنید $c \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = \frac{2f'(c)}{f(c)}.$$

تمرین ۲: فرض کنید f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = L$ ثابت کنید $f'_-(b) = L$.

تمرین ۳: فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و روی $(0, 1)$ دو بار مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(0) = 0$ و برای هر $0 < x < 1$ ، $f''(x) > 0$ ثابت کنید a وجود دارد که $0 < a < 1$ و $f'(a) < f(1)$.

تمرین ۴: فرض کنید $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد و به علاوه داشته باشیم:

$$(f(b))^2 - (f(a))^2 = b^2 - a^2.$$

نشان دهید $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)f(c) = c$.

تمرین ۵: فرض کنید $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ و برای هر $x, y \in (0, \infty)$

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

فرض کنید $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است. نشان دهید $f(x)$ در هر نقطه $x \in (0, \infty)$ مشتق‌پذیر است و به علاوه برای هر $x \in (0, \infty)$ ، $f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$.

تمرین ۶: تابعی پیوسته مثال بزنید که در تمام نقاط به غیر از یک نقطه مشتق‌پذیر است و قضیه میانگین برای آن برقرار نیست.

تمرین ۷: چندجمله‌ای مختلط $p(z) = iz^3 + z^2 + 2z + i$ را در نظر بگیرید. از روی این چندجمله‌ای و عدد مختلطی مانند z_0 ، دو تابع حقیقی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \operatorname{Re}(p(x + z_0))$$

$$g(x) = \operatorname{Im}(p(ix + z_0))$$

الف) نشان دهید اگر $z_0 = 0$ آن‌گاه $f'(0) = g'(0)$.

ب) نشان دهید اگر به جای $p(z)$ هر چندجمله‌ای مختلط دیگر و به جای $z_0 = 0$ هر عدد مختلط دیگر را در نظر بگیریم باز هم داریم $f'(0) = g'(0)$.

تمرین ۸:

الف) نشان دهید مشتق هر تابع زوج، فرد است و مشتق هر تابع فرد، زوج است. (تابع f زوج است هرگاه $f(-x) = f(x)$ و f فرد است هرگاه $f(-x) = -f(x)$.)

ب) نشان دهید مشتق هر تابع زوج در مبدا برابر صفر است و مشتق دوم هر تابع فرد در مبدا، صفر است.

ج) شخصی ادعا می‌کند که گزاره زیر صحیح است:

اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که مشتق آن تابعی زوج است، آنگاه مشتق تابع $g(x) = f(x) \sin(x^3 + x)$ در مبدا برابر صفر است.

و این اثبات را آورده است:

تابع $\sin(x)$ و $x + x^3$ هر دو فرد هستند پس ترکیب آن‌ها یعنی $\sin(x^3 + x)$ فرد است. مشتق تابع f زوج است پس تابع f نیز فرد است. حاصل ضرب دو تابع فرد، زوج است و مشتق هر تابع زوج در صفر برابر صفر است.

ابتدا اشتباه این استدلال را بیابید، سپس مثال نقضی برای ادعای این فرد بیاورید.

تمرین‌های کتاب آدامز: ص ۱۴۲ ت ۵، ص ۱۴۷ ت ۱۰