

تمرین‌های ریاضی عمومی یک

سری پنجم

۱۰ آبان ۱۳۹۷

تمرین ۱: فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و روی $(0, 1)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \alpha$. ثابت کنید $f'_+(0)$ وجود دارد و $f'_+(0) = \alpha$.

تمرین ۲: فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد و $a \geq 0$. ثابت کنید $c_1, c_2 \in (a, b)$ وجود دارند به طوری که

$$\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$$

تمرین ۳: فرض کنید $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0) = 0$. فرض کنید برای هر $x \in (0, \infty)$ ، $f'(x)$ وجود داشته باشد و $f'(x)$ روی $(0, \infty)$ تابعی صعودی باشد. ثابت کنید تابع $g(x) = f(x)/x$ نیز روی $(0, \infty)$ صعودی است.

تمرین ۴: فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$ ، $f'(x) \neq 0$ نشان دهید برای هر $x \in [a, b]$ ، $f'(x) > 0$ یا $f'(x) < 0$.

تمرین ۵: فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که دو بار مشتق‌پذیر است. فرض کنید خطی که دو نقطه $(0, f(0))$ و $(1, f(1))$ را به هم وصل می‌کند نمودار تابع را در نقطه‌ای مانند $(a, f(a))$ که $0 < a < 1$ قطع می‌کند. نشان دهید $c \in [0, 1]$ وجود دارد که $f''(c) = 0$.

تمرین ۶: فرض کنید f, g دو تابع مشتق‌پذیر باشند که $f(0) = g(0)$. اگر برای هر x در بازه $(-1, 1)$ داشته باشیم: $f(x) \geq g(x)$ ، نشان دهید $f'(0) = g'(0)$.

تمرین ۷: فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}$ دست کم یکی از دو مقدار $f(x)$ یا $f'(x)$ برابر صفر است. نشان دهید f روی \mathbb{R} ثابت است.

تمرین ۸: فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و کراندار باشد. نشان دهید اگر $f'(x)$ تنها در تعداد متناهی نقطه صفر شود، آن‌گاه f در بی‌نهایت حد دارد.

تمرین ۹: فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و مشتق آن تابعی متناوب باشد.

الف) نشان دهید حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

ب) اگر حد بالا برابر مقداری مانند c باشد آن‌گاه نشان دهید تابع $h(x) = f(x) - cx$ نیز متناوب است.

تمرین ۱۰: پلیس راهنمایی و رانندگی در جاده‌ها به فاصله‌های مشخص دوربین‌های تشخیص سرعت کار گذاشته است که در همان لحظه عبور ماشین سرعت ماشین را اندازه می‌گیرد. رانندگان متخلفی که از مکان دوربین در جاده اطلاع دارند در

نزدیکی‌های آن سرعت خود را کم می‌کنند! می‌دانیم دوربین علاوه بر ثبت پلاک، زمان عبور ماشین‌ها را نیز ثبت می‌کند. از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید و ایده‌ای مطرح کنید تا با کمک این داده‌ها، رانندگان متخلف بیشتری به دام بیافتند! آیا می‌توان تنها با استفاده از اطلاعات این دوربین‌ها، تمام رانندگان متخلف (با سرعت غیرمجاز) را مشخص کرد؟ آیا می‌توانید کاربرد دیگری از قضیه مقدار میانگین مطرح کنید؟



تمرین‌های کتاب آدامز: ص ۱۴۲ ت ۱۷، ص ۱۲۹ ت ۲۷