

# تمرین‌های ریاضی عمومی یک

## سری چهارم

۳ آبان ۱۳۹۷

**تمرین ۱:** ثابت کنید هر چندجمله‌ای از درجه زوج روی  $\mathbb{R}$  دارای ماکزیمم یا مینیمم است.

**تمرین ۲:** فرض کنید  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  دو تابع پیوسته با ماکزیمم برابر باشند. ثابت کنید  $c \in [0, 1]$  وجود دارد به طوری که  $f(c) = g(c)$ .

**تمرین ۳:** فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته است به طوری که برای هر  $x \in (0, 1)$ ،  $f^2(x) = 1$ . ثابت کنید  $f \equiv 1$  یا  $f \equiv -1$  روی  $(0, 1)$ .

**تمرین ۴:** فرض کنید  $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد و  $f(0) = f(n)$ . ثابت کنید  $x_1, x_2 \in [0, n]$  وجود دارد به طوری که

$$x_2 - x_1 = 1, \quad f(x_2) = f(x_1)$$

**تمرین ۵:** فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته و متناوب باشد. ثابت کنید نمودار  $f$  وترقی افقی از هر طول دلخواه دارد (وتری از نمودار  $f$  یعنی پاره‌خطی که ابتدا و انتهای آن روی نمودار است).

**تمرین ۶:** ثابت کنید هیچ تابع پیوسته‌ای مانند  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  وجود ندارد که هر مقدار را دقیقاً در دو نقطه بگیرد. با رسم نمودار نشان دهید تابع پیوسته  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد به طوری که برای هر  $c \in \mathbb{R}$  دقیقاً سه نقطه  $x_1, x_2, x_3$  وجود دارند که  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = c$ .

**تمرین ۷:** نشان دهید معادله

$$\frac{x^6 - x^4 - 1}{x^2 + 1} = 2$$

حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

**تمرین ۸:** نشان دهید اگر یک چندجمله‌ای روی  $\mathbb{R}$  حداقل  $n$  ریشه متمایز داشته باشد، مشتق آن حداقل  $n - 1$  ریشه متمایز دارد.

**تمرین ۹:** گردشگری در لحظه تحویل سال ۹۷ از مشهد سفر خود را شروع می‌کند و بعد از دقیقاً یک سال به آبادان می‌رسد. سپس از همان مسیر به سمت مشهد باز می‌گردد طوری که دقیقاً در لحظه تحویل سال ۹۹ به مشهد می‌رسد. نشان دهید در راه بازگشت حتماً از مکانی می‌گذرد که دقیقاً یک سال قبل نیز از همان‌جا عبور کرده است. (ممکن است گردشگر در طول مسیر توقف نیز داشته باشد).

تمرین‌های کتاب آدامز: ص ۸۷ ت ۳۲، ص ۹۳ ت ۲