

# تمرین‌های ریاضی عمومی یک

## سری سوم

۲۲ مهر ۱۳۹۷

**تمرین ۱:** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی متناوب باشد. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  موجود باشد، نشان دهید  $f$  تابعی ثابت است. نتیجه بگیرید  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  وجود ندارد.

**تمرین ۲:** فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع باشند که در یک بازه حول نقطه  $a$  تعریف شده‌اند و برای هر  $x$  در این بازه  $f(x) \leq g(x)$ . اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  وجود داشته باشد، ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . آیا می‌توان گفت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ؟

**تمرین ۳:** فرض کنید  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  دو تابع پیوسته باشند به طوری که برای هر  $x \in \mathbb{Q}$ ،  $f(x) = g(x)$ . نشان دهید  $f = g$  روی  $\mathbb{R}$ .

**تمرین ۴:** مثالی از توابع  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ارائه کنید که  $f$  در نقاط گویا ناپیوسته باشد،  $g$  فقط در یک نقطه ناپیوسته باشد، لیکن  $g \circ f$  هیچ جا پیوسته نباشد.

**تمرین ۵:** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  یک تابع باشد و  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + \frac{1}{f(x)}) = 2$ . ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**تمرین ۶:** نشان دهید اگر  $f$  و  $g$  دو تابع پیوسته روی  $\mathbb{R}$  باشند، آنگاه تابع  $m$  با ضابطه

$$m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

نیز روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

**تمرین ۷:** تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن  $c$  یک عدد حقیقی است:

$$f(x) = \begin{cases} c & x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

ثابت کنید عدد  $c$  هر چه باشد،  $f$  در نقطه 0 ناپیوسته است.

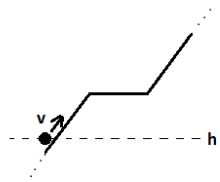
**تمرین ۸:** دو تابع  $f$  و  $g$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = 10x - [10x]$$

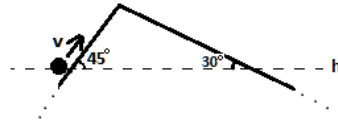
$$g(x) = 4x - [4x]$$

نقاط ناپیوستگی تابع  $f \circ g$  را روی بازه  $[0, 1]$  بیابید. (راهنمایی:  $(f \circ g)(x) = 40x - [40x]$ )

**تمرین ۹:** در سطوح شیب‌داری مانند زیر گلوله‌ای را از ارتفاع  $h$  با سرعت  $v$  در جهت سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر



(ب)



(الف)

$t(v)$  مدت زمانی باشد که بعد از آن این گلوله دوباره به ارتفاع  $h$  باز می‌گردد، ثابت کنید تابع  $t(v)$  نسبت به  $v$  پیوسته نیست و دقیقاً یک نقطه ناپیوستگی دارد. همچنین برای شکل (ب) حد راست تابع  $t(v)$  در این نقطه ناپیوستگی را بیابید. (از اصطکاک صرف نظر کنید و فرض کنید گلوله از سطح جدا نمی‌شود و هنگام تغییر شیب با همان اندازه سرعت، در راستای شیب جدید حرکت می‌کند.)