تمرین‌های ریاضی عمومی یک
سری سوم

۲۲ مهر ۱۳۹۷

تمرین ۱: فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی متناوب باشد. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود باشد، نشان دهید f تابعی ثابت است. نتیجه بگیرید $\lim_{x\to\infty} \sin x$ وجود ندارد.

تمرین ۲: فرض کنید f و g دو تابع باشند که در یک بازه حول نقطه a تعریف شده‌اند و برای هر x در این بازه $f(x) \leq g(x)$. اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود داشته باشد، ثابت کنید $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$. آیا می‌توان گفت $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$؟

تمرین ۳: فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند به طوری که برای هر $x \in \mathbb{Q}$، $f(x) = g(x)$. نشان دهید $f = g$ روی $\mathbb{R}$.

تمرین ۴: مثالی از توابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ارائه کنید که f در نقاط گویا ناپیوسته باشد، g فقط در یک نقطه ناپیوسته باشد، لیکن $g \circ f$ هیچ جا پیوسته نباشد.

تمرین ۵: فرض کنید $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ یک تابع باشد و $\lim_{x\to 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2$. ثابت کنید $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

تمرین ۶: نشان دهید اگر f و g دو تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه تابع m با ضابطه

$$m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

نیز روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

تمرین ۷: تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن c یک عدد حقیقی است:

$$f(x) = \begin{cases} c & x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

ثابت کنید عدد c هر چه باشد، f در نقطه 0 ناپیوسته است.

تمرین ۸: دو تابع f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor$$

$$g(x) = 4x - \lfloor 4x \rfloor$$

نقاط ناپیوستگی تابع $f \circ g$ را روی بازه $[0, 1]$ بیابید. (راهنمایی: $f \circ g(x) = 40x - \lfloor 40x \rfloor$)

تمرین ۹: در سطوح شیب‌داری مانند زیر گلوله‌ای را از ارتفاع h با سرعت v در جهت سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر

(ب)

(الف)

$t(v)$ مدت زمانی باشد که بعد از آن این گلوله دوباره به ارتفاع h باز می‌گردد، ثابت کنید تابع $t(v)$ نسبت به v پیوسته نیست و دقیقا یک نقطه ناپیوستگی دارد. همچنین برای شکل (ب) حد راست تابع $t(v)$ در این نقطه ناپیوستگی را بیابید. (از اصطکاک صرف نظر کنید و فرض کنید گلوله از سطح جدا نمی‌شود و هنگام تغییر شیب با همان اندازه سرعت، در راستای شیب جدید حرکت می‌کند.)