

# تمرین‌های ریاضی عمومی یک

## سری دوم

۱۵ مهر ۱۳۹۷

تمرین ۱: فرض کنید  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  و ضرایب آن اعداد حقیقی باشند و  $f(2i) = f(2+i) = 0$ . مقدار  $a + b + c + d$  را بیابید.

تمرین ۲: معادله  $(1 + \sqrt{3}i)(z + i)^n = (1 - \sqrt{3}i)(z - i)^n$  را حل کنید.

تمرین ۳: ثابت کنید تمام ریشه‌های  $p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$  درون دایره واحد قرار دارند. (راهنمایی:  $(1 - z)p(z)$  را در نظر بگیرید.)

تمرین ۴: مقدار  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$  را محاسبه کنید.

تمرین ۵: فرض کنید  $n \geq 2$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$ . تمام جواب‌های معادله زیر را بیابید.

$$\lambda(\bar{z} + z^n) = i(\bar{z} - z^n)$$

تمرین ۶: فرض کنید  $p(z)$  یک چندجمله‌ای غیر ثابت باشد که تمام ریشه‌هایش در ناحیه اول و چهارم قرار دارد. ثابت کنید ریشه‌های  $p'(z)$  نیز همین خاصیت را دارند.

تمرین ۷: می‌دانیم  $z = 2 - \sqrt{3}i$  یک ریشه معادله زیر است. در این صورت، بقیه ریشه‌های آن را بیابید.

$$z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 26z + 21 = 0$$

تمرین ۸: با استفاده از قضیه دموآور،  $\cos(5x)$  را بر حسب  $\sin(x)$  و  $\cos(x)$  بنویسید.

تمرین ۹: تمام نقاطی در صفحه را مشخص کنید که  $\operatorname{Re}(z^3) < \operatorname{Im}(z^3)$ .

تمرین ۱۰: تمام ریشه‌های واحدی مانند  $z$  و  $w$  را پیدا کنید که  $z + w$  نیز ریشه واحد است.

تمرین ۱۱: در قسمتی از علم مهندسی کنترلی، به یک سیستم فیزیکی یک تابع مشخصه به فرم  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  نسبت می‌دهند که  $P$  و  $Q$  چندجمله‌ای‌های مختلط هستند. ریشه‌های این دو چندجمله‌ای اطلاعاتی درباره رفتار این سیستم فیزیکی در اختیار ما قرار می‌دهد<sup>۱</sup>. ثابت کنید اگر  $Q$  از درجه ۳ و با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه مثبت بودن ضریب  $z^3$  و منفی بودن ضریب  $z^2$  نتیجه می‌دهد  $Q$  ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت دارد.

<sup>۱</sup> برای مثال، اگر  $Q$  دارای ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت باشد، آنگاه این سیستم رفتار ناپایدار از خود نشان می‌دهد.