

تمرین‌های ریاضی عمومی یک سری اول

۶ مهر ۱۳۹۷

تمرین ۱ (آدامز، ص ۱۰ - A): اگر $\text{Arg}(z) = 3\pi/4$ و $\text{Arg}(w) = \pi/2$ ، $\text{Arg}(zw)$ را بیابید.

تمرین ۲: اگر λ عددی حقیقی در بازه $[-2, 2]$ باشد، چند عدد مختلط مانند z روی دایره واحد (یعنی $|z| = 1$) وجود دارد که $(z + \bar{z}) = \lambda$ ؟

تمرین ۳: تمام اعداد مختلط z را تعیین کنید که $|z| = 1$ و $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$.

تمرین ۴: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند به طوری که $|z_1| = |z_2| = 1$ و $z_1 z_2 \neq -1$ ، ثابت کنید $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ عددی حقیقی است.

تمرین ۵: فرض کنید $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ و $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ و $|z_1| = |z_2| = 1$. مقدار $|z_1 - z_2|$ را محاسبه کنید.

تمرین ۶ (آدامز، ص ۱۰ - A): مجموعه نقاط z در صفحه مختلط و صادق در نامعادله $|z - 3 + 4i| \leq 5$ را تعبیر هندسی کنید (یا شکل آن را بکشید).

تمرین ۷: اگر z و w روی دایره واحد باشند، نشان دهید $|z + w|^2 = 2 + 2\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right)$.

تمرین ۸: فرض کنید x, y و z سه ریشه واحد باشند. ثابت کنید $x + y + z$ یک ریشه واحد است اگر و تنها اگر جمع دو تا از آن‌ها صفر باشد.

تمرین ۹ (آدامز، ص ۱۰ - A): به ازای اعداد حقیقی مثبت a و b همواره داریم $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. آیا اتحاد مشابه برای \sqrt{zw} که در آن z و w اعدادی مختلط اند برقرار است؟

تمرین ۱۰ (آدامز، ص ۱۰ - A): جواب‌های مختلط معادله $z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0$ را بیابید.

تمرین ۱۱: عدد مختلط $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$ را به فرم $a + bi$ بنویسید که در آن a و b اعداد حقیقی هستند.

تمرین ۱۲: مجموعه نقاطی در صفحه مختلط را بیابید که z^2 دارای قسمت حقیقی منفی است. (اگر به جای z^2 ، z^n را در نظر بگیرید این مجموعه چه می‌شود؟)

تمرین ۱۳: فرض کنید S یک زیرمجموعه از صفحه مختلط و z عددی مختلط باشد. با ضرب z در تمام نقاط S ، به زیرمجموعه جدید S' می‌رسیم. برای هر یک از حالت‌های زیر S' را بیابید.

الف) $S =$ دایره‌ای به شعاع واحد حول مبدا و $z = 2i$

ب) $S =$ دایره‌ای به شعاع r و مرکز $r + i$

تمرین ۱۴: هر یک از مجموعه‌های S در سوال قبل را در نظر بگیرید. اگر هر عضو z از این مجموعه‌ها را به $1/z$ ببریم، به چه شکلی خواهیم رسید؟

تمرین ۱۵: نشان دهید اگر z_1, z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند که $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ آنگاه z_1, z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند و بالعکس.