به نام او، برای او، با یاد او

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل، آبان ۹۷، گروه‌های ۱ و ۲

۱. آ)

$$y = vt \Rightarrow v + tv' = \frac{v^3 + 2v - 1}{v+1} \Rightarrow tv' = \frac{v^3 - v^2 + v - 1}{v+1} \Rightarrow (\frac{1}{v-1} - \frac{v}{v^2+1})v' = \frac{1}{t}.$$

در نتیجه با توجه به شرط اولیه خواهیم داشت،

$$\ln|v-1| - \frac{1}{2}\ln(v^2+1) = \ln t \Rightarrow \frac{|v-1|}{\sqrt{v^2+1}} = t \Rightarrow \frac{v^2 - 2v + 1}{v^2+1} = t^2.$$

پس،

$$v = \frac{1 - \sqrt{1-(1-t^2)^2}}{1-t^2} \Rightarrow y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+\sqrt{1-(1-t^2)^2}}.$$

از یک سو بایستی $t \neq 0, v \neq -1$ باشد (مخرج کسر در معادله). از طرف دیگر باید زیر رادیکال نامنفی باشد که نتیجه می‌دهد $|t| \leq \sqrt{2}$. لذا جواب در بازه $(0, \sqrt{2})$ معتبر است.

ب) معادله را از روش معمول معادلات ریکاتی می‌توان حل کرد. یا به شکل مستقیم:

$$y' - 1 = (y-t)^2 \Rightarrow (y-t)' = (y-t)^2 \Rightarrow \frac{1}{t-y} = t + C.$$

از شرط اولیه $C = -1$ به دست می‌آید،

$$\frac{1}{t-1} = t - y \Rightarrow y = t - \frac{1}{t-1}, \quad -\infty < t < 1.$$

۲. آ) معادله کامل است (مشتقات جزئی برابر هستند) و با تابع اولیه گرفتن به دست می‌آوریم، $x^3 \tan y + \frac{y^3}{x^2} + y^4 = \mathrm{cte}$.

ب)

$$y' = v(y) \Rightarrow yvv' = v^3 \Rightarrow \frac{v'}{v^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{-1}{v} = \log y + C$$
$$\Rightarrow (\log y + C)y' = -1 \Rightarrow y\log y - y + Cy = -t + c.$$

۳. آ) $W' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = -pW \Rightarrow W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right)$ پس رونسکین یا همه جا صفر است یا همه جا یک علامت را دارد.

ب) فرض کنید a و b دو ریشه متوالی y_1 باشند. لذا y_1 در بازه (a,b) ناصفر است.

روش اول: $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W}{y_1^2}$ لذا نسبت این دو تابع در این بازه یا صعودی و یا نزولی است. اما این نسبت در دو انتها به سمت بی‌نهایت می‌رود (دقت کنید که y_2 نمی‌تواند در دو سر بازه برابر صفر باشد، وگرنه رونسکین در آن نقاط صفر می‌شود) و لذا تنها امکان این است که این دو بی‌نهایت یکی مثبت و دیگری منفی باشند. پس y_2 در دو سر بازه علامت متفاوت دارد.

روش دوم: y_1' بایستی در دو سر بازه علامت متفاوت داشته باشد (دقت کنید که مشتق y_1 در دو سر صفر نیست وگرنه رونسکین صفر می‌شود) لذا با نگاه کردن به رونسکین در دو سر بازه، y_2 نیز در دو سر علامت مختلف دارد.

پس y_2 جایی در میان بازه صفر می‌شود. اکنون همین استدلال برای جابه‌جا شدن اندیس‌ها نیز کار می‌کند و لذا بین هر دو ریشه y_2 نیز حداقل یک ریشه y_1 قرار خواهد داشت. پس y_2 نمی‌تواند بیش از یک ریشه در بین دو ریشه متوالی y_1 داشته باشد.

.۴

$$y_1(t) = t^{-1/2}\sin t \Rightarrow y_1' = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\sin t + t^{-1/2}\cos t, \quad y_1'' = \frac{3}{4}t^{-5/2}\sin t - t^{-3/2}\cos t - t^{-1/2}\sin t$$
$$\Rightarrow t^2 y_1'' + t y_1' + (t^2 - \frac{1}{4})y_1 = 0.$$

پس این تابع جواب قسمت همگن است. برای پیدا کردن جواب دوم مسأله همگن، با فرض $y_2 = y_1\nu$ خواهیم داشت،

$$t^2(y_1\nu'' + 2y_1'\nu') + t(y_1\nu') = 0 \Rightarrow t^{1/2}\sin t\,\nu'' + 2t^{1/2}\cos t\,\nu' = 0 \Rightarrow \sin t\,\nu'' + 2\cos t\,\nu' = 0.$$

این معادله را از روش معمول معادله خطی می‌توان حل کرد. اما یک راه ابتکاری نیز می‌توان داشت. از معادله فوق داریم،

$$(\sin t\,\nu)'' + \sin t\,\nu = 0 \to \sin t\,\nu = \cos t.$$

بنابراین جواب دوم مسأله همگن به صورت $y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t$ است. رونسکین این دو جواب به شکل $\frac{1}{t}$ خواهد بود و لذا از روش تغییر پارامترها داریم،

$$Y = -y_1\int \frac{y_2}{W\sqrt{t}} + y_2\int \frac{y_1}{W\sqrt{t}} = -\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\int \cos t\,\mathrm{d}t + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\int \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{t}}.$$

و جواب عمومی به شکل $y(t) = Y(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}(c_1\sin t + c_2\cos t)$ است.

.۵ $r^3 + r^2 + 3r - 5 = 0 \Rightarrow r = 1, -1+2\mathrm{i}, -1-2\mathrm{i}$. برای جواب خصوصی یک بار $c\mathrm{e}^{-t}$ را قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم $c = -\frac{1}{8}$. یک بار نیز بایستی تابع $\mathrm{e}^t(c_1\sin 2t + c_2\cos 2t)$ را قرار دهیم. البته راه دیگر آن است که $c\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}$ را قرار دهیم و با محاسبات مختلط، قسمت حقیقی را در نظر بگیریم:

$$1 = c((1+2\mathrm{i})^3 + (1+2\mathrm{i})^2 + 3(1+2\mathrm{i}) - 5) = c(2\mathrm{i})(2)(2+4\mathrm{i}) = 8(-2+\mathrm{i})c \Rightarrow c = \frac{-2-\mathrm{i}}{40}.$$

لذا $c_1 = \frac{1}{40}$ و $c_2 = \frac{-1}{20}$ خواهد بود.

.۶ آ) جواب عمومی به شکل $\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}(at+b)$ است. از شرط اولیه خواهیم داشت، $\frac{-\gamma b}{2m} + a = 0$ و لذا a و b هم‌علامت خواهند بود. پس برای $t > 0$ عبارت $at+b$ هیچ گاه صفر نمی‌شود. در حد بی‌نهایت هم واضح است که y به سمت صفر می‌رود.

ب)

$$y'' + 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{-t} \Rightarrow y(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-t}.$$

از شرایط اولیه بایستی داشته باشیم،

$$c_1 + c_2 + 1 = 0,\ -2c_1 - 3c_2 - 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2,\ c_2 = 1.$$

برای به دست آوردن بیشترین فاصله ممکن از مبدأ،

$$0 = y' = 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-t} \Rightarrow 3\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-t} + 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-t} = 1,\ \frac{1}{3} \Rightarrow t = 0,\ \ln 3.$$

بنابراین،

$$y_{\max} = y(\ln 3) = -\frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$