

به نام او، برای او، با یاد او
 امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل، دی ۹۷، گروه‌های ۱ و ۲
 نام استاد درس: شریفی تبار
 زمان: ۱۸۰ دقیقه

۱. دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش سری‌ها (حول صفر) بیابید. (۲۰ نمره)

$$5x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0, \quad x > 0.$$

۲. دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش سری‌ها (حول صفر) بیابید. (۱۵ نمره)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

۳. جواب معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش لاپلاس بیابید. (۱۵ نمره)

$$y'' + 4y' + 4y = 25 \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

۴. جواب معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش لاپلاس بیابید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 4y = f(t) + \delta(t-\pi) - 3\delta\left(t - \frac{3\pi}{4}\right), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4}, \\ 2, & \frac{\pi}{4} \leq t. \end{cases}$$

۵. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. دو جواب مستقل خطی دستگاه $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ را فقط با استفاده از روش مقدار و بردار ویژه بیابید و سپس به کمک آن ماتریس e^{tA} را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۶. جواب عمومی دستگاه ناهمگن زیر را پیدا کنید. (۲۰ نمره) (به راه حل غیر از روش دستگاه‌ها، تنها نیمی از نمره تعلق می‌گیرد)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6t \\ -4 - 11t \end{bmatrix}$$

موفق باشید.