

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل
گروه ۳ - وقت امتحان: سه ساعت

۱. دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش سری ها (حول صفر) بیابید. (۲۰ نمره)

$$5t^2 y'' + t(t+1)y' - y = 0, \quad t > 0.$$

۲. دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش سری ها (حول صفر) بیابید. (۲۰ نمره)

$$t^2 y'' - ty' + (1-t)y = 0, \quad t > 0.$$

۳. جواب های معادله دیفرانسیل زیر را با شرط $y(0) = 0$ ، فقط با استفاده از روش لاپلاس بیابید. (۱۵ نمره)

$$ty'' + (3t-1)y' - (4t+9)y = 0.$$

۴. جواب معادله دیفرانسیل زیر را فقط با استفاده از روش لاپلاس بیابید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t) + \delta(t-\pi) - 3\delta(t-\frac{3\pi}{4}) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ 2, & \frac{\pi}{4} \leq t \end{cases}$$

۵. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

الف) دو جواب مستقل خطی دستگاه $X' = AX$ را فقط با استفاده از روش مقدار و بردار ویژه بیابید، سپس به کمک آن ماتریس e^{tA} را حساب کنید. (۱۰ نمره)

ب) فرض کنید بردار $X(t)$ یک جواب دستگاه $X' = (A + B(t))X$ باشد که در آن درایه های ماتریس $B(t)$ تابعی از t هستند. نشان دهید که بردار $Y(t) = e^{-tA} \cdot X(t)$ یک جواب دستگاه $Y' = (e^{-tA} B e^{tA})Y$ می شود. (۵ نمره)

ج) فرض کنید $x(t)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $x'' + (1+q(t))x = 0$ باشد که در آن داریم $\int_0^{+\infty} |q(t)| dt < +\infty$. نشان دهید دو عدد حقیقی α و β وجود دارند طوری که $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \alpha \cos t - \beta \sin t) = 0$. (۱۰ نمره)

راهنمایی: می توانید از این قضیه استفاده کنید که هر جواب دستگاه $X' = B(t)X$ در بی نهایت حد دارد به شرط آن که $\int_0^{+\infty} |b_{ij}(t)| dt < +\infty$ که در آن $b_{ij}(t)$ ها درایه های ماتریس $B(t)$ هستند.