

بسمه تعالی
ریاضی عمومی ۲

تاریخ پنجشنبه ۸ آذر ۱۳۹۷

مدت: ۳ ساعت

امتحان میان ترم

۱ دو نقطه $B = (1, 1, 0)$ و $C = (2, 3, 1)$ را در فضا در نظر می‌گیریم.
(الف) همه نقاط A روی خط $\gamma(t) = (1, 2, 3) + t(1, -1, 1)$ را چنان تعیین کنید تا مساحت مثلث ABC برابر با $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ شود. (۱۰ نمره)
(ب) همه نقاط A روی خط داده شده در قسمت قبل را چنان تعیین کنید تا بردار قائم صفحه گذرنده از مثلث ABC موازی بردار $(1, -1, 1)$ شود. (۱۰ نمره)

۲ برای $a > 0$ و $b > 0$ بیضی داده شده توسط معادله زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(الف) یک پارامتری‌سازی برای این بیضی ارائه کنید و محیط این بیضی را به صورت یک انتگرال بیان کنید (لزومی به محاسبه این انتگرال نیست!). (۱۰ نمره)
(ب) انحنای این بیضی را در یک نقطه به مختصات (x_0, y_0) روی محیط آن بر حسب x_0 و y_0 بدست آورید. (۱۰ نمره)

۳ (الف) معادله صفحه مماس بر رویه تعریف شده بوسیله معادله $xyz = 1$ را در نقطه (a, b, c) واقع بر این رویه بدست آورید (در اینجا فرض شده است $abc = 1$). (۱۰ نمره)
(ب) اگر $f(x, y, z) = xyz$ ، آنگاه مشتق جهتی (سویی) تابع f را در راستای بردار $u = (1, 1, 1)$ در نقطه (a, b, c) بدست آورید. (۱۰ نمره)

۴ a, b و c اعداد حقیقی ناصفر هستند. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x, y, z) = ax + by + cz$ روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را پیدا کنید. (۲۰ نمره)

۵ فرض کنید $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$.
(الف) همه نقاط بحرانی f را شناسایی کرده و نوع آنها را تعیین کنید. (۱۰ نمره)
(ب) ماکسیمم و مینیمم مطلق f روی ناحیه مستطیلی شکل توپر $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 2$ را بدست آورید، همچنین با کشیدن یک شکل و ذکر دلیل، جهت افزایش f روی مرز این ناحیه را مشخص کنید. (۱۰ نمره)