



تاریخ: ۹۷/۹/۸
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۹۸-۹۷

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.

سؤال ۱. الف) فرض کنید z عددی مختلط واقع در ربع اول صفحه مختلط باشد که در تساوی $z^7 - 2z^3 + 2 = 0$ صدق می‌کند. مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$\frac{1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{1397}}{1 + z + z^2}$$

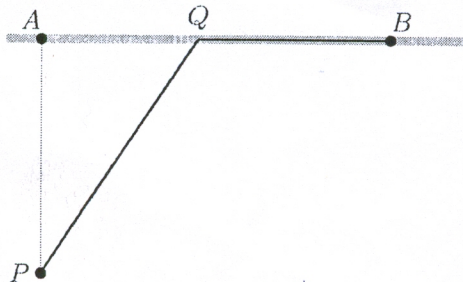
ب) نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی $x > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leq x^x.$$

سؤال ۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ را تابعی پیوسته در نظر بگیرید با این ویژگی که $f(0) = f(n)$. نشان دهید $x_1, x_2 \in [0, n]$ وجود دارند به طوری که $x_1 - x_2 = 1$ و $f(x_1) = f(x_2)$.

سؤال ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}$ $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$. نشان دهید بین هر دو ریشه متوالی f لااقل یک ریشه از g وجود دارد.

سؤال ۴. کویری را در نظر بگیرید که در جنوب یک جاده مستقیم که از غرب به شرق کشیده شده قرار دارد و فرض کنید P نقطه‌ای از کویر باشد. همچنین، فرض کنید A نقطه‌ای از جاده باشد که کمترین فاصله را از F که ۱۲ کیلومتر است دارد و نقطه B از جاده را در ۱۰ کیلومتری شرق A در نظر بگیرید. اگر با یک ماشین که سرعت حرکت آن در کویر ۱۵ کیلومتر در ساعت و در جاده ۳۹ کیلومتر در ساعت است از نقطه P به سمت نقطه B حرکت کنیم، در چه فاصله‌ای از شرق A باید وارد جاده شویم تا در کمترین زمان ممکن به نقطه B برسیم؟



سؤال ۵. فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت، درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر $c \in (a, b)$ موجود باشد به طوری که $f(c) > 0$ ، آنگاه $d \in (a, b)$ وجود دارد با این ویژگی که برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) \leq f(d)$ و $f'(d) = 0$.

(ب) اگر f دو بار مشتق پذیر فرض شود و برای هر $x \in [a, b]$ در تساوی $f(x) = f'(x) + f''(x)$ صدق کند، آنگاه f تابع ثابت صفر است.

سؤال ۶. (الف) فرض کنید $0 < x < 1$ عددی حقیقی باشد. نشان دهید به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x^n < \epsilon$.

(ب) نشان دهید اگر $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد که $f(0) = 0$ و برای هر $x \in [0, 1]$ ، $|f'(x)| \leq |f(x)|$ آنگاه f تابع ثابت صفر است.

سؤال ۲: ۱۵ نمره،

سؤال ۴: ۱۵ نمره،

سؤال ۶: ۱۰+۵ نمره.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵+۱۰ نمره،

سؤال ۳: ۱۵ نمره،

سؤال ۵: ۱۰+۵ نمره،

مجموع: ۱۰۰ نمره

~~۲۰~~

۲

۵

۱