۹۶/۸/۲۴

(۹۶/۱/۲۰ ?

$$(x^2y^3+y)\,dx+(x-x^3y^2)\,dy=0$$

روش ها)

۱) تفکیک متغیرها

۲) معادلات همگن

۳) معادلات خطی مرتبه اول و قابل تبدیل به خطی (مثل برنولی)

۴) معادلات کامل و معادلات کامل پذیر

۵) تغییر متغیر

• همگن)

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha}M(x,y)$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\beta}N(x,y)$$

$$\frac{y}{x}=z\rightarrow y'=z'x+z$$

• معادله خطی مرتبه اول)

$$y'+p(x)y=q(x)\rightarrow y_c=e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{y'}{y}=-p(x)$$

$$\rightarrow y=y_c\left(\int\frac{q(x)}{y_c}+c_1\right)$$

• برنولی)

$$y'+p(x)\,y=q(x)\,y^n\longrightarrow\frac{y'}{y^n}+p(x)\,y^{1-n}=q(x)$$ که خطی می شود

z

z' ضریب

• ~~کامل~~ : $\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ کامل

$$f(x,y) \to \partial f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M \to f = \int M + c(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N \to \frac{\partial (\int M)}{\partial y} + c'(y) = N \end{cases}$$

بعد از حل معادله به دست می آید

• اگر کامل نشود $\to \rho(x,y) =$ عامل انتگرال‌ساز

(*) اگر $\frac{\Delta}{-M} = f(y) \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(y) = e^{\int f(y)\,dy}$

اگر $\frac{\Delta}{N} = g(x) \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(x) = e^{\int g(x)\,dx}$

?

$$(x^2y^3 + y)dx + (x - x^3y^2)dy = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (3x^2y^2 + 1) - (1 - 3x^2y^2) = 6x^2y^2 \neq 0$$

* از راه (*) هم نمی‌شود چون $6x^2y^2$ تقسیم بر M و N فقط برحسب x یا فقط برحسب y نمی‌شود.

* $x^\alpha y^\beta$ را در چند جمله‌ای ضرب ... داشته باشد

$$(\underbrace{x^{\alpha+2}y^{3+\beta} + x^{\alpha}y^{\beta+1}}_{M_1})dx + (\underbrace{x^{\alpha+1}y^{\beta} - x^{\alpha+3}y^{\beta+2}}_{N_1})dy = 0$$

Subject: ....

Day: ۲۶ Month: ۸ Year: ۲۴

$$\Delta = \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \left[(\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + (\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}\right] - \left[(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} + (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}\right] = 0$$

به ازای هر x و y باید صفر شود. (یک چندجمله‌ای متحد با صفر شده است که ضرایب صفر * لذا حتماً ...)

$$(\alpha+\beta+6)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + (\beta-\alpha)x^{\alpha}y^{\beta} = 0$$

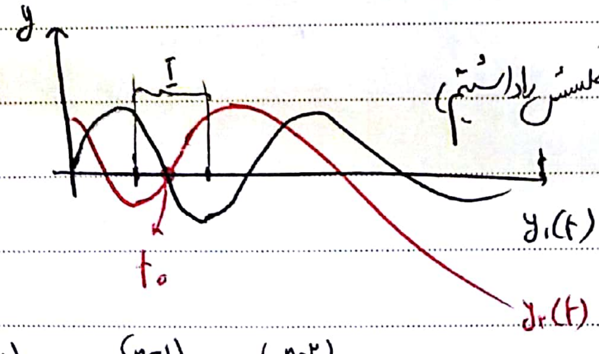
$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha+\beta+6=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\beta=-3} \quad \boxed{\alpha=-3} \Longrightarrow \mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} = x^{-3}y^{-3}$$

* برای چندجمله‌ای‌ها به سراغ $x^{\alpha}y^{\beta}$ برو.

[۰ و ۱]

تمرین ۳۸ کتاب بویس ص ۱۳۸) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 در بازه‌ای مانند I یک صفر مشترک داشته باشند،

y_1 و y_2 نمی‌توانند جواب‌های مستقل معادله همگن روبه‌رو باشند. $y''+p(t)y'+q(t)y=0$



رونسکین $W=0$ در t_0 لذا نتیجه می‌گیریم وابسته است (برعکس یادداشتیم)

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

مرتبه n ام

$$y^{(n)} + p(t)y^{(n-1)} + q(t)y^{(n-2)} + \dots + r(t)y = 0$$

$$\boxed{W[y_1,\dots,y_n] = \underbrace{W[y_1,\dots,y_n](t_0)}_{\text{ثابت } c} e^{-\int p(t)dt}}$$

تابع

آبل $\Longrightarrow$ W در کل بازه صفر می‌شود

این جا در t_0 ، $c=0$ می‌شود

... W در یک بازه نه در یک نقطه

Day: ۲۹ Month: ۸ Year: ۹۶

$Q_1(t)=t^2+1$
$Q_2(t)=t^2+2t^{-2}$
$Q_3(t)=t^2+2+t^{-2}$ } جواب‌ها خصوصی

؟ فرض کنید $t>0$ می‌دانیم که

منظور از y_1 و y_2 که مستقل خطی اند.

الف) یک پایه (دستگاه اساسی) برای جواب‌های معادله‌ی همگن به دست آورید.

مجموعه‌ی اساسی جواب همان $c_1y_1+c_2y_2$

ب) $y''+p(t)y'+q(t)y=g$ را حل کنید.

الف)
$y_1=\phi_2(t)-\phi_1(t)=2t^{-2}-1$
$y_2=\phi_3(t)-\phi_1(t)=t^{-2}+1$
$\Rightarrow y_c=c_1y_1+c_2y_2=c_1(2t^{-2}-1)+c_2(t^{-2}+1)$

$\boxed{\text{جواب‌ها خصوصی را می‌توان همواره از جواب عمومی به دست آورد.}}$

ب)
$y_p=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$

$$u_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ g & y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}$$

W مربوط به y_1

ستون اول را با $\begin{vmatrix}0\\ g\end{vmatrix}$ جابجا کن

۳ متغیره $\begin{vmatrix}0\\0\\g\end{vmatrix}$ آخرین سطر $g(t)$ بود.

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2 & y_3\\ 0 & y_2' & y_3'\\ g & y_2'' & y_3''\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2,y_3)}$$

$$u_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & g\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}2t^{-2}-1 & t^{-2}+1\\ & \end{vmatrix}$$

Subject:

Day: ۹۶ Month: ۸ Year: ۲۴

* ۴

اگر $W=0$ دو جواب معادله‌ی مستقل خطی باشند یعنی حتما p و q در r ناپیوسته بوده‌اند.

اگر $W=0$ و p و q و r پیوسته باشند ← جواب‌ها حتما وابسته‌ی خطی بوده‌اند.

تمرین کتاب بویس سوال ۴۳ ص ۱۷۶

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

ثابت کنید اگر معادله‌ی بالا با تغییر متغیر به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل شد آن‌گاه

$$\frac{q'(t)+2p(t)q(t)}{2(q(t))^{3/2}}=c_3 \Longleftrightarrow$$ معادله با ضرایب ثابت

c_3 ثابت

$x=u(t)$ متغیر جدید

حذف

کدام یک از معادلات زیر را می‌توان به معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد:

$p(t)=t$, $q(t)=e^{-t^2} \longrightarrow q'(t)=-2te^{-t^2}$

1) $y''+ty'+e^{-t^2}y=0 \longrightarrow \frac{-2te^{-t^2}+2te^{-t^2}}{2e^{-\frac{3}{2}t^2}}=0=c_3$

2) $ty''+(t^2-1)y'+t^3y=0$

3) $y''+(3t)y'+t^2y=0$

LOOKY

Subject: ....

Day: ۹۶ Month: ۸ Year: ۲۴

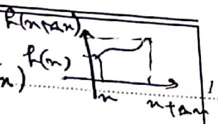
اصلی چون قراره y را برحسب x بنویسی

(اثبات) $y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$

$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dy'}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)$

مشتق اولی × دومی + مشتق دومی × اولی

$= \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}$



$\bullet\ y = f(x)$

$\bullet\ dy = f(x+\Delta x) - f(x)$

تفاضل

$d^{②}y = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$

اثبات (*)

$f(x) = x^2 \to d^2f = (x+2\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)^2 + x^2$

$\Delta x \to 0$

تفاضل

$\frac{d^2f}{\Delta x^2} = \frac{d^{③}f}{dx^{②}} = y''$

توان

(*) $d(y(x)) = f(x+\Delta x) - f(x)$

x را بگذارید در f را حساب کنید ، x+Δx را در رابطه بالا بگذارید f را حساب کنید

دوبار

$d^2(y(x)) = \left[f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)\right] - \left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]$

$\bullet\ f(x,y) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$

f_x

$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx \quad df(x, y+\Delta y) \times \frac{\partial x}{\partial x}$

در x ضرب تقسیم

$df = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right) + \left(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right)$

[illegible]

(ادامه حل)

نرمال کردن = ضریب بزرگترین مشتق ← 1

ضریب اولی را ۱ کن

جا گذاری در

$y'' + py' + qy = 0$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx} + q(t)y = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\left[\frac{\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\right]}_{C_2} + \underbrace{\left[\frac{q(t)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\right]}_{C_1^2 \sim} y = 0$

(*A)

توان ۲ گذاشتیم به راحتی زده

Looky coloring world

Subject: ......

Day: ۲۴ Month: ۸ Year: ۲۴

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{c_1}\,\frac{q'(t)}{2\sqrt{q(t)}}$$

① $q(t) = c_1^2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{c_1}\sqrt{q(t)} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{c_1}\int \sqrt{q(t)}\,dt}$ (*)

② $$\frac{\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \overset{\text{طبق }(*)}{=} \frac{\frac{1}{c_1}\frac{q'(t)}{2\sqrt{q(t)}} + p(t)\left(\frac{1}{c_1}\sqrt{q(t)}\right)}{\left(\frac{1}{c_1}\right)^2 q(t)} = C_2$$ ثابت

$$= \frac{\overline{}}{2c_1\sqrt{q(t)}} \cdots = \frac{q'(t) + 2p(t)q(t)}{\underbrace{\left(2c_1\sqrt{q(t)}\right)\left(\frac{1}{c_1}\right)^2 q(t)}_{\frac{2}{c_1}(q(t))^{3/2}}} = C_2$$

$c_3 = c_2 \times \frac{1}{c_1}$

صفر فرض کن محاسبات کم بشه

$\Downarrow$

$c_2 = 0$

$c_2 = 0$ جایگزین کن (**)

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + c_1^2 y = 0 \longrightarrow y = c_1' \sin(c_1 x) + c_2' \cos(c_1 x)$:.

$\alpha^2 + c_1^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = ic_1 \\ \alpha_2 = -ic_1 \end{cases}$ جایگزین کن

$x(t) = \frac{1}{c_1}\int \sqrt{e^{-t^2}}\,dt$ c_1 را به دست بیاور از (**)

(۲) و (۳) را هم به روش مشابه حل کن.

۹۴,۱,۲۰ ?

$$\begin{cases} x''(t)y(t) - x'(t)y'(t) = 0 \\ y''(t)y(t) + (x'(t))^2 - (y'(t))^2 = 0 \end{cases}$$

* در دستگاه معادلات حتماً یکی ازش با تولید متغیر حل می‌شود.

Sol) $\left(\frac{x'}{y}\right)' = \frac{x''y - x'y'}{y^2} = 0 \Longrightarrow \frac{x'}{y} = c_1 \Longrightarrow x' = y c_1$

راه ۲) تغییر متغیر $x''y = x'y' \longrightarrow \int \frac{x''(t)}{x'(t)} = \int \frac{y'(t)}{y(t)} \Longrightarrow \ln(x'(t)) = \ln(y(t)) + \ln(c_1) = \ln(c_1 y(t))$

$\Longrightarrow x'(t) = c_1 y(t)$

$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - y'^2}{y^2}$

$y''y + c_1^2 y^2 - y'^2 = 0 \Longrightarrow y''y - y'^2 = -c_1^2 y^2$

$\longrightarrow -\int c_1^2 = \int \frac{y''y - (y')^2}{y^2} \longrightarrow \frac{y'}{y} = -c_1^2 t \longrightarrow y = e^{-c_1^2 \int t\, dt} + c_2$

$y = e^{-\frac{c_1^2}{2} t^2} + c_2$

$x' = c_1 \left(e^{\frac{c_1^2 t^2}{2}} + c_2\right)$

پیکارد

$y(0) = 1$

$y' = f(x, y)$

پیوسته نسبت به y

$\frac{\partial f}{\partial y}$ نسبت به y پیوسته

پیکارد:

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

پیوسته

جواب دارد

Day: ۲۹ Month: ۸ Year: ۲۴

$x'' + (2+\frac{1}{t})x' + (\frac{2}{t})x = 0 \quad (t>0) \rightarrow$ p, q پیوسته   ؟ (۸۸۲,۳

$x \to v$

$u(t) = x'(t) + rx(t)$ ثابت کنید معادله‌ی بالا را می‌توان برحسب v بازنویسی کرد و به معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول برحسب v می‌رسیم و جواب مسئله را پیدا کنید $x_1(t) = ?$ بعد از حل کنی با کاهش مرتبه دومی به دست می‌آید. $x_2(t) = ?$

$x_2 = z\,x_1(t)$ q(t) نداریم چون معادله‌ی اصلی همگنه.

(1)

$$\boxed{v(t) = x'(t) + rx(t)}$$

$$v'(t) = x''(t) + rx'(t)$$

مرتبه‌ی اول خطی $\longrightarrow v' + p(t)v = 0$

به فرم

$$(x''(t) + rx'(t)) + p(t)(x'(t) + rx(t)) = 0$$

r عدد ثابت است

$$x''(t) + \underbrace{(p(t)+r)}_{2+\frac{1}{t}}(x'(t)) + \underbrace{r\,p(t)}_{\frac{2}{t}}x(t) = 0$$

حدس با ۲ معادله ۲ مجهول

$$\Longrightarrow p(t) = \frac{1}{t} \qquad r = 2 \qquad \Longrightarrow v' + \frac{1v}{t} = 0 \longrightarrow v = c\,e^{-\int \frac{1}{t}dt} = c\,e^{-\ln(t)} = \frac{c_1}{t} \quad (2)$$

$$(2),(1) \Longrightarrow x'(t) + 2x(t) = \frac{c_1}{t} \Longrightarrow x = e^{-\int 2dt} = e^{-2t}$$

معادله مرتبه ۲ ← باید دو جواب ثابت داشته باشیم

$$x = x_c\left(\int \frac{q(t)}{x_c} + c_1\right) = e^{-2t}\left(\int \frac{c_1}{e^{-2t}\,t} + c_2\right)$$

طبق رابطه‌ی گفته شده در جزوه حل