DATE / / SUBJECT:

Math Service Courses → آدرس تلگرام

۹۶/۸/۱۷ :

مثال: $y' = \frac{t y(4-y)}{3}$; $y(0) = y_0$

تعیین رفتار جواب برحسب y_0 های مختلف زمانیکه $t \to \infty$ ← جواب پایدار سیستم

گاهی ممکن بنویسن $x \to \infty$ یا $t \to \infty$

t مفهوم زمان دارد و x مفهوم مکان

این ها از فیزیک شروع شد.

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(4-y)} = \int_0^t \frac{t\,dt}{3}$$

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{4-y} = \frac{1}{4y} + \frac{1}{4(4-y)}$$

جواب ها ← گذرا / حالت پایدار

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln(y) - \frac{1}{4}\ln(4-y)\Big|_{y_0}^{y} = \frac{t^2}{6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{y}{4-y}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y_0}{4-y_0}\right) + \frac{t^2}{6}\right) \times 4$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\frac{y}{4-y}}{\frac{y_0}{4-y_0}}\right) = \frac{2t^2}{3}$$

$$\frac{y}{4-y} = \frac{y_0}{4-y_0} e^{\frac{2t^2}{3}} \to \infty$$

حالت اول: if $y_0 = 0 \Rightarrow y = 0$

حالت دوم: if $y_0 \neq 0 \Rightarrow y = 4$

سؤال امتحان ۹۵:

همه‌ی ضرایب در بازه‌ی $I = [10, +\infty)$ پیوسته

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (*)$$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1(t)=1\\ \phi_2(t)=t\\ \phi_3(t)=\ln(t)\end{array}\right\}$$ سه جواب معادله‌ی ⊛ هستند

الف/ دو جواب مستقل خطی را در بازه‌ی I بنویسید.

ب/ جواب عمومی کنش همگن معادله‌ی ⊛ را بنویسید.

ج/ یک جواب خصوصی مثل $\phi_4(t)$ برای معادله‌ی ⊛ فرض کنید به طوری که

$$\lim_{t\to\infty}\phi_4(t)=-\infty$$

قبلاً گفتیم برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به دو جواب مستقل خطی نیاز داریم.

اگر y_1 جواب معادله باشد $\Rightarrow y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1=g(t)$

" " " اگر y_2 $\Rightarrow y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2=g(t)$ $\Big\}\Rightarrow$

$$(y_2-y_1)''+p(t)(y_2-y_1)'+q(t)(y_2-y_1)=0$$

نکته: تفاضل هر دو جواب دلخواه ← یک جواب عمومی

$$y_1=\phi_2(t)-\phi_1(t)=t-1$$
$$y_2=\phi_3(t)-\phi_1(t)=\ln(t)-1$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1 & \ln(t)-1\\ 1 & \frac{1}{t}\end{vmatrix}\neq 0$$

در یک نقطه غیر صفر باشد کافی است. می‌توانیم به ازای t عدد دهیم البته با توجه به بازه‌ای که سؤال داده.

$$y_c=c_1y_1+c_2y_2=c_1(t-1)+c_2(\ln(t)-1)$$

کافیه هرضریبی از y_1 یا y_p را با جواب خصوصی جمع کنیم تا جواب خصوصی جدید بدست آید.

ضریب جواب خصوصی را عوض نکردیم مثلاً: $\underset{y_p}{1} - \underbrace{(+-1)}_{y_1}$

سؤال: 1) $yy'' = 2y'^2 - 2y'$

مستقل از x هستند

2) $1 + y'^2 = 2yy''$

1/ $yy'' = 2y'(y'-1) \Rightarrow \int \frac{y''}{2(y'-1)} = \int \frac{y'}{y}$

با این کار مشتق مخرج در صورت ظاهر شد.

$$\frac{1}{2} \ln(y'-1) = \ln(y) + \ln(c) = \ln(cy)$$

$$(y'-1)^{\frac{1}{2}} = cy \Rightarrow y'-1 = (cy)^2 \Rightarrow y' = c^2y^2+1$$

ریکاتی: $y' + p(t)y = q(t) + r(t)y^2$

یا $y'' + r(t)y' + p(t)y = q(t)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{c^2y^2+1} = \int dx$$

2/ $\frac{2y''}{1+y'^2} = \frac{1}{y}$

برای اینکه مانند قبلی شود در y' ضرب می‌کنیم تا مشتق مخرج در صورت ظاهر شود.

$$\int \frac{2y'y''}{1+y'^2} = \int \frac{y'}{y} \rightarrow \ln(1+y'^2) = \ln(y) + \ln(c)$$

DATE / / SUBJECT:

$y' = z = \frac{dy}{dx}$ $y'' = ?$ $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$= \frac{dz}{dy} \cdot z$

① راه دیگر حل معادله: $1/$ $y \cdot (\frac{dz}{dy} \cdot z) = 2z^2 - 2z$

$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2(\frac{z}{y} - \frac{1}{y}) \Rightarrow (\frac{dz}{dy}) - (\frac{2}{y})z = \frac{-2}{y}$

معادلاتی که مستقل از x هستند y' را z می‌گیریم و حل می‌کنیم.

سوال: دو تابع داده y^2 و $y|y|$

$1/$ $[0,1] \rightarrow$ آیا مستقل هستند؟

$y|y| \rightarrow \begin{cases} y^2 & y \geq 0 \\ -y^2 & y < 0 \end{cases}$

$2/$ $[-1,1] \rightarrow$ "

بررسی استقلال خطی: $c_1 y^2 + c_2 y|y| = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ از راه ترکیب خطی

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ بررسی رونسکین: $q(x)\, y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

باید $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ پیوسته باشند تا بتوان از رونسکین استفاده کرد.

$p(x)$ $y'_c = c_1 y'_1 + c_2 y'_2$

"وابستگی خطی به دو معادله‌ی اول" $y''_c = c_1 y''_1 + c_2 y''_2 \rightarrow$ اضافی

$\Rightarrow y''_c + p(x)y'_c + q(x)\, y_c = 0$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

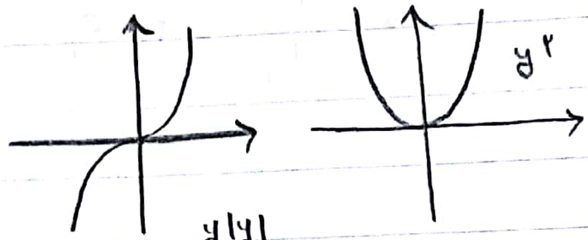
$$W(y_1 , y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

برای اینکه دستگاه جواب داشته باشد

$[0,1] \to y^2 = y|y| \Rightarrow y^2 - y|y| = 0$

به صورت جداگانه نگاه کنیم
وابسته اند اما در کل مستقل اند

$[-1,0] \to y^2 = -y|y| \Rightarrow y^2 + y|y| = 0$



c_1 , c_2 دو عدد ثابت باید باشند نه اینکه در هر بازه عوض شوند.

سمت راست نمودارها باهم برابر است و وابسته اند اما در کل بازه این چنین نیست.

متن درس ۸ نحوه‌ی تشکیل معادلات:

$e^{a} \sin(bt)$ $\qquad a+ib$

$e^{a} \cos(bt)$ $\qquad a-ib$

$$\alpha^2 - (2a)\alpha + (a^2+b^2) = 0 \qquad y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0$$

جمع ضرب ریشه‌ها

$$W(y_c , y_1 , y_2) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

$$W(y_1,y_2)\, y'' - (y_1 y_2'' - y_2 y_1'')\, y' + \cdots = 0$$

$$W(y_1, y_2) = W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W' = (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + \underbrace{(\cancel{y_1' y_2'} - \cancel{y_1' y_2'})}_{0}$$

$$W y'' - W' y' + \cdots = 0$$

$$y'' - \frac{W'}{W} y' + \cdots = 0$$

$$p(x) = \frac{-W'}{W} \Rightarrow W = c e^{-\int p(x)}$$

$$W[y_1, y_2] = \underbrace{W[y_1, y_2](x_0)}_{\text{رونسکین به ازای } x_0 \rightarrow \text{ثابت}} e^{-\int p(x)dx}$$

$$y''' + p(x) y'' + \cdots = 0$$

$$W[y_1, y_2, y_3] = \underbrace{W[y_1, y_2, y_3](x_0)}_{\text{ثابت}} e^{-\int p(x)dx}$$

سؤال: $y_1(x)$ ← یک جواب معادله

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

$$y_2(x) = Z(x) \cdot y_1(x)$$

$$Z(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}$$

سؤال های مرتبط دیگر:

① $2t^2 y'' + 3t y' - y = 0 \quad y_1 = \frac{1}{t} \Rightarrow y_2 = ?$

② $(1+x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad y_1 = x \Rightarrow y_2 = ?$

روش کاهش مرتبه

DATE / / SUBJECT:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)}$$

قبلاً گفتیم:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y_c = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y = y_c\left(\int \frac{q(x)}{y_c} + c_1\right)$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int p(x)}$$

معلوم ← y_1 ، مجهول ← y_2

$$y_2' - \left(\frac{y_1'}{y_1}\right) y_2 = \frac{Ce^{-\int p(x)}}{y_1}$$

$$\Rightarrow \quad y_c = e^{\int \frac{y_1'}{y_1}} = y_1$$

کاهش مرتبه

$$y = y_1 \int \frac{Ce^{-\int p(x)}}{y_1^2}$$

تمرین کتاب ص ۱۳۷ تمرین ۱۳:

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0$$

$$y_1(1) = 1,\ y_1'(1) = 0,\ y_2(1) = 0,\ y_2'(1) = 1$$

$$p(t) = \frac{1}{t}$$

$$W(y_1, y_2) = Ce^{-\int p(t)} = Ce^{-\int \frac{1}{t}}$$

$$= \frac{C}{t} \quad C \to ?$$

رونسکین را باید به ازای نقطه‌ی مشخصی حساب کنیم $\boxed{t=1}$

$$W[y_1, y_2](1) = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow C = 1 \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{t}}$$

* را مساوی صفر قرار ندادیم چون نیازی به افزودن قید جدید نداشتیم. تنها یک قید کافی بود. بنابراین مقادیر y'' و y' و y را در معادله‌ی اصلی جاگذاری می‌کنیم و از سمت چپ تنها * باقی می‌ماند و سمت راست هم که همان $r(x)$ است.

DATE / / SUBJECT:

روش تغییر پارامتر جهت یافتن جواب خصوصی

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x)$$

$$y_1 , y_2 \rightarrow y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\Downarrow$$

$$y_p = ?$$

$$y_p = z_1(x)\,y_1 + z_2(x)\,y_2$$

$$y_p' = \underbrace{(z_1' y_1 + z_2' y_2)}_{0} + (z_1 y_1' + z_2 y_2')$$

خودمان صفر قرار دادیم تا z_1 و z_2 را بیابیم.

$$1/\ \ y_1 z_1' + y_2 z_2' = 0$$

$$2/\ \ y_1' z_1' + y_2' z_2' = r(x)$$

$$y_p'' = \underbrace{\boxed{(z_1' y_1' + z_2' y_2')}}_{*} + (z_1 y_1'' + z_2 y_2'')$$

$$z_1 , z_2 = ?$$

دنبال مجهول اولیم پس ستون اول را تغییر می‌دهیم. صورت همان تکرار مخرج است که ستون اول آن تغییر کرده.

$$z_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1 , y_2)}$$

$$z_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{W(y_1 , y_2)}$$

فروردین ۹۶: $\underset{y_1}{t^{-1}} , \underset{y_2}{t^{2}}$ دو جواب عمومی

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = \underbrace{t^{5}}_{r(t)}$$

جواب خصوصی؟

$$y_p = z_1 y_1 + z_2 y_2$$

$$W(y_1 , y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & t^2 \\ -\frac{1}{t^2} & 2t \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$z_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ t^5 & 2t \end{vmatrix}}{3} = \frac{-t^7}{3}$$

$$\Longrightarrow z_1(t) = \frac{-t^8}{24}$$

DATE / / SUBJECT:

$$Z_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{1}{t^2} & t^5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{t^4}{3} \xRightarrow{\text{انتگرال}} Z_2(t) = \frac{t^5}{15}$$

$$y_p = \frac{-t^8}{24} y_1 + \frac{t^5}{15} y_2 = \frac{-t^8}{24} \times \frac{1}{t} + \frac{t^5}{15} \times t^2$$

اگر سه متغیره بود :

$$Z_3' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & r(x) \end{vmatrix}}{W}$$