ect

اول ۸۴، ۸۵ و ۸۸ رو حل کن

$AX = \underset{\text{مقدار ویژه}}{\lambda} X \rightarrow \underset{3\times 3}{(A - \lambda I)}\ \underset{3\times 1}{x} = 0 \rightarrow$ برای جواب غیر صفر باید: $\overset{\det}{|A - \lambda I|} = 0$ ۸۴ ح

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 3 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad X' = AX + B$$ -۸۴

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 2 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$ معادله ی درجه ۳ بر حسب $\lambda$

گام اول: تشکیل معادله ی دترمینان ... مقادیر ویژه را بدست آورید

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3i \\ \lambda_3 = -3i \end{cases} \rightarrow$$ مقادیر ویژه ی ماتریس

$* \quad X' = AX \Rightarrow x = e^{At} c_1$

$$\lambda = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \overset{*}{X_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ به طور مشابه برای $\lambda_2$ و $\lambda_3$ $\rightarrow X' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X_1 = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$X_{2,3} = e^{\pm 3i} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_2} + i \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_3} \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

جواب همگن $u_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -\sin(3t) & \cos(3t) \\ 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ e^{2t} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ $\quad C \Rightarrow c_1, c_2, c_3$ ثابت

در حالت ملی مختلط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{bmatrix}$$ اگر A قطری باشد می توانیم $e^{At}$ را حساب کنیم.

Subject
Date

$$y' + Py = q(x) \rightarrow y_c = e^{-\int p\,dx} \rightarrow y_p = y_c \int y_c^{-1} \cdot q$$
روش ضرایب متغیر

$$x_p(t) = u_1(t) \int_0^t [u_1(s)]^{-1} \cdot B(s) \cdot s$$
روش ضرایب متغیر برای ماتریس ها: جواب خصوصی

ماتریس معکوس ها $\longrightarrow$ برای هر درایه جدا انتگرال می‌گیریم و در آخر در $u_1$ ضرب می‌کنیم

یادآوری معکوس ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 5 \times 7 - 9 \times 12$$

$$\hookrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -12 & 5 \end{bmatrix}$$

کهاد: درایه $a$ را بخواهیم باید سطر و ستون آن را حذف کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \overset{\text{حذف}}{2} & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|} \begin{bmatrix} \boxed{\phantom{0}} \rightarrow 4 \times 5 - 2 \times 1 = 18 \\ a_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$X = X_p + X_c = u_1 + u_2$$

مثال:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = -x + 2y + e^{2t} \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A - \lambda I| =$$ در ماتریس های بالا/پایین مثلثی، مقادیر ویژه = درایه‌های روی قطر هستند $\rightarrow$ نیازی به محاسبه نیست

$$\lambda = 2 \rightarrow$$ با تکرار ۳ $$\rightarrow X_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow (a) \rightarrow$$ دیگر نداری $$\rightarrow X_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$e^{\lambda t}$ ، و حتی تکرار بود $\quad te^{\lambda t} \quad t^2 e^{\lambda t}$

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ e^{2t} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t)\; X_2(t)\; X_3(t) \longrightarrow \begin{cases} x_2(t) = (P_0 + tP_1)e^{\lambda t} \\ x_3(t) = (Q_0 + tQ_1 + \frac{t^2}{2} Q_2)e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$c_1' e^{\lambda t} + c_2' t e^{\lambda t} + c_3' t^2 e^{\lambda t}$$

Subject
Date

$$\begin{cases}(A-\lambda I)P_0=P_1 \\ (A-\lambda I)P_1=0\end{cases}$$ $P_0 , P_1$ : مجهول $\longrightarrow (A-\lambda I)^2 P_0=0$

$\longrightarrow x_2'(t)=\begin{bmatrix}0\\1\\t\end{bmatrix}=(P_0+tP_1) \longrightarrow x_2(t)=\begin{bmatrix}0\\e^{2t}\\te^{2t}\end{bmatrix} \rightarrow P_0=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad P_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$(A-\lambda I)Q_0=Q_1$

$(A-\lambda I)Q_1=Q_2$ $\longrightarrow x_3(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}2\\2t\\t^2\end{bmatrix} \rightarrow Q_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad Q_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad Q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$(A-\lambda I)Q_2=0$

حل عمومی کلی : $u(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2e^{2t}\\ 0 & e^{2t} & 2te^{2t}\\ e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$

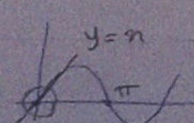
$$x_p(t)=u_1(t)\int_0^t \underbrace{[u_1(s)]^{-1}}_{\text{ماتریس معکوس } 3\times 3}\cdot \underbrace{B(s)}_{3\times 1}$$

سری ها: مثال - سری تیلور معادله را حساب کنید.

$y''-ty=0 \longrightarrow$ شرط اولیه $\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{عدد ثابت}}(x-x_0)^n$$ سری تیلور حول $x=x_0$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$



Subject
Date

ادامه‌ی مثال -

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} \overset{\text{مجهول}}{a_n}\, t^n \longrightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

مشتق سری‌ها تحت شرایطی می‌توان مشتق را وارد کرد که توابع خوش رفتار این شرایط را دارند.

$$\to \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{\overset{n\to n+3}{n-2}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+1}=2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+1}=0$$

$$\to (2a_2)+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+3)(n+2)a_{n+3}-a_n\Big]t^{n+1}=0 \to$$ تک تک ضرایب $=0$

$$a_2=0 \quad , \quad a_{n+3}=\frac{1}{(n+3)(n+2)}a_n \to \begin{cases} a_0=y(0)=1 & \to a_{3n} \\ a_1=y'(0)=0 & \to a_{3n+1}=0 \\ a_2=0 & \to a_{3n+2}=0 \end{cases}$$

$$a_3=\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{3!}$$

$$a_6=\frac{1}{6\times 5}\times\frac{4}{4}\times\frac{1}{3!}=\frac{4}{6!}$$

$$a_9=\frac{1}{9\times 8}\times\frac{7}{7}\times\frac{4}{6!}=\frac{7\times 4\times 1}{9!}$$

$$\to a_{3n}=\frac{1\times 4\times 7\times(3n-2)}{(3n)!}$$

$$\to y=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}t^{3n}$$

پایانی ۸۴ -

$$x^2y''+xy'+(x-1)=0 \to y''+\underbrace{\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{P}y'+\underbrace{\frac{(x-1)}{x^2}}_{Q}y=0$$

قضیه‌ی فروبنیوس

نقطه‌ی $x=0$ تکین/منفرد است اگر:

$$\lim_{x\to 0} x\times P=\text{متناهی} \to \lim\left(\left(\tfrac{1}{x}\right)\times x\right)=1 \checkmark$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\times Q=\text{متناهی} \to \lim x^2\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=-1 \checkmark$$

Subject
Date

در این صورت:　　　　　مجهول $r$:　　　　　$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

$$\longrightarrow (r^2-1) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left[(n+r)^2-1\right] a_n + a_{n-1} \right) x^{n+r} = 0 \longrightarrow r = 1$$

$$a_0 = 1 \longrightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{(n+r)^2-1} = \frac{-a_{n-1}}{n(n+2)} \longrightarrow a_1 = \frac{-1}{1\times 3} \times \frac{2}{2}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2\times 4} \times \frac{1}{1\times 3} \times \frac{2}{2}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{n!\,(n+2)!} \longleftarrow$$

$$\longrightarrow y = x^{\overset{1}{\longleftarrow r}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n!\,(n+2)!} x^n$$

پایانی ۸۵ - جواب حول $x=0$ ؟　　　　　$y'' + \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$

تکین منظم ← $x=0$ ← متناهی :　　　　　ضریب $y$: حد $\lim_{x\to 0} x^2 \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{4}$

ضریب $y'$: حد $\lim x \times (0) = 0$ ✓　　　　　ما $y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$n \to n+4$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2}}_{y''} + \underbrace{4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2+s}}_{4x^2 y} + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s-2}}_{\frac{1}{4x^2} y} = 0$$

برای هم‌توان کردن، توان بزرگ را نگه داشته و بقیه را براساس آن می‌نویسیم.

$$\sum_{n=-4} \left[(n+s+4)(n+s+3) + \frac{1}{4}\right] a_{n+4} x^{n+s+2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0$$

فرض: $a_0 = 1$

$n = -4 \rightarrow \underbrace{\left[ s(s-1) + \frac{1}{4} \right] a_0 = 0}_{\text{ضریب عدد ثابت}} \rightarrow s = \frac{1}{2} \rightarrow a_{4n}$ ✓ $a_n$ بر ۴ بخش تقسیم می‌شود.

$n = -3 \rightarrow \underbrace{\left[ (s+1)s + \frac{1}{4} \right] a_1 = 0}_{\text{ضریب } x} \rightarrow a_1 = 0 \rightarrow a_{4n+1} = 0$

$n = -2 \rightarrow \underbrace{\left[ (s+2)(s+1) + \frac{1}{4} \right] a_2 = 0}_{\text{ضریب } x^2} \rightarrow a_2 = 0 \rightarrow a_{4n+2} = 0$

$n = -1 \rightarrow \underbrace{\left[ (s+3)(s+2) + \frac{1}{4} \right] a_3 = 0}_{\text{ضریب } x^3} \rightarrow a_3 = 0 \rightarrow a_{4n+3} = 0$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left[ (n+s+4)(n+s+3) + \frac{1}{4} \right] a_{n+4} + 4 a_n \right] x^{n+s+2} = 0$$

$$\rightarrow a_{n+4} = \frac{-4}{(n+4)^2} a_n \qquad a_{4n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$\rightarrow y = \underbrace{\sqrt{x}}_{x^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{4n}$$

«فصل سوم: سری ها»

«حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با استفاده از سری های توانی حول $x=0$»

مثال 1: $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$ حول $x=0$ سوال امتحانی 90، 4، 23

حل: فرض می‌کنیم جواب معادله بالا بصورت سری توانی زیر باشد:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

هدف پیدا کردن ضرایب مجهول $a_0, a_1, \ldots$ می‌باشد.

گام اول: جایگذاری $y, y', y''$ بصورت زیر در معادله:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2-\frac{1}{9})\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام دوم: جملات پشت سیگماها را به داخل می‌آوریم:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}}_{\text{دو واحد شیفت به جلو } (n=2)} \underbrace{a_n x^{n+2}}_{n \text{ ها را با } n-2 \text{ عوض می‌کنیم و دو واحد شیفت به عقب}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} a_n x^n = 0$$

SOBHAN

گام سوم: باید توان تمام x ها n باشد و این کار را با شیفت دادن n انجام می‌دهیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} a_n x^n = 0$$

$\frac{1}{9}a_0$ $\quad$ $\xrightarrow{n=1} \frac{1}{9}a_1 x$

گام چهارم: حد پایین تمام سیگماها باید n=2 باشد:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \frac{1}{9}a_0 - \frac{1}{9}a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{9} a_n x^n = 0$$

گام پنجم: یکی کردن سیگماها:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2} - \frac{1}{9}a_n \right] x^n + a_1 x - \frac{1}{9}a_0 - \frac{1}{9}a_1 x = 0$$

گام آخر: نوشتن رابطه بازگشتی:

عدد ثابت = 0 $\to -\frac{1}{9}a_0 = 0 \to a_0 = 0$

ضریب $x$ = 0 $\to a_1 - \frac{1}{9}a_1 = 0 \to a_1 = 0$

$x^n$ ضریب = ۰ ← رابطه بازگشتی $n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2} - \frac{1}{9}a_n = 0 \quad (n \geq 2)$

$$a_n\left(n^2 - n + n - \frac{1}{9}\right) + a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

رابطه بازگشتی: $a_n = -\dfrac{1}{n^2 - \frac{1}{9}}\, a_{n-2} \quad (n \geq 2)$

$n = 2 \rightarrow a_2 = \dfrac{-1}{4 - \frac{1}{9}}\, a_0 = 0 \quad ; \quad n = 3 \rightarrow \dfrac{-1}{9 - \frac{1}{9}}\, a_1$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

مثال 2 $y'' - 2xy' - 2y = 0$ ; حول $x = 0$

[سوال امتحان 30/10/94 پایه چهارم
سوال امتحان 1/11/93]

حل:

گام اول: جایگذاری $y''$ و $y'$ و $y$ بصورت زیر در معادله:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری میکنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام دوم: جملات پشت سیگما را به داخل می‌آوریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{n(n-1)a_n x^{n-2}}_{} - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

جابجا کردن n با n-2

گام سوم: باید توان تمام xها n باشد و این کار را با شیفت دادن انجام می‌دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\overset{n+1}{\cancel{(n+2-1)}}\, a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

گام چهارم: حد پایین سیگماها باید بیشترین n یعنی n=1 باشد:

$$(0+2)(0+1)a_2 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - 2a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

گام پنجم: یکی کردن سیگماها:

$$(2a_2 - 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n\right] x^n = 0$$

گام آخر: نوشتن رابطه بازگشتی:

عدد ثابت $= 0 \rightarrow 2a_2 - 2a_0 = 0 \rightarrow a_2 = a_0$

را با بازگذاری $(n\geq 1)$ $\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+2)a_n=0 \longrightarrow$ ضریب $x^n=0$

$$n=1 \rightarrow (1+2)(1+1)a_{1+2}=(2\times 1+2)a_1 \rightarrow 6a_3=4a_1 \rightarrow a_3=\frac{2}{3}a_1$$

$$n=2 \rightarrow (2+2)(2+1)a_{2+2}=(2\times 2+2)a_2 \rightarrow 12a_4=6a_2 \rightarrow a_4=\frac{6}{12}a_2 \rightarrow a_4=\frac{1}{2}a_2$$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

سوال امتحان 94/10/30 جلسه دوم حول $x=0$ ؛ $y''+2xy'+5y=0$ :مثال 3

گام اول: جایگذاری $y''$ و $y'$ و $y$ بصورت زیر در معادله:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad ; y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \quad ; y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

جایگذاری میکنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

گام دوم: جملات پشت سیگما را داخل می‌آوریم:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}}_{n-2 \text{ با } n \text{ جایگذاری}}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}5a_nx^n=0$$

گام سوم: باید توان تمام $x$ ها $n$ باشد و این کار با شیفت دادن $n$ انجام می شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_{n}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}5a_{n}x^{n}=0$$

گام چهارم: حد پایین سیگماها باید بیشترین $n$ یعنی $n=1$ باشد:

$$\overbrace{(0+2)(0+1)a_{2}x^{0}}^{2a_2}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_{n}x^{n}+5a_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}5a_{n}x^{n}=0$$

گام پنجم: یکی کردن سیگماها:

$$(2a_2+5a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2na_{n}+5a_{n}\right]x^{n}=0$$

گام آخر: نوشتن رابطه بازگشتی:

$$\text{عدد ثابت}=0 \to 2a_2+5a_0=0 \to a_2=-\frac{5}{2}a_0$$

رابطه بازگشتی $x^{n}\ \text{ضریب}=0 \to (n+2)(n+1)a_{n+2}=(2n+5)a_{n} \quad (n\geq 1)$

$$n=1 \to (1+2)(1+1)a_{1+2}=(2\times1+5)a_1 \to 6a_3=8a_1 \to a_3=\frac{8}{6}a_1 \to a_3=\frac{4}{3}a_1$$

$$n=2 \to (2+2)(2+1)a_{2+2}=(2\times2+5)a_2 \to 12a_4=9a_2 \to a_4=\frac{9}{12}a_2 \to a_4=\frac{3}{4}a_2$$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

SOBHAN

4) حل) $y'' - x^2 y' - 2xy = 0$ ; حول $x=0$ سوال امتحان 93/4/1

گام اول: جایگذاری $y, y', y''$ بصورت زیر در معادله:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام دوم: جملات پشت سیگما را داخل می‌آوریم:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{\text{n-2 جایگذاری n با}} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 0$$

گام سوم: باید توان تمام xها n باشد و این کار را با شیفت دادن n انجام می‌دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n = 0$$

گام چهارم : حد پایین سیگماها باید بیشترین n یعنی n=2 باشد :

$$\overbrace{(0+2)(0+1)a_2x^0}^{2a_2}+\overbrace{(1+2)(1+1)a_3x^1}^{6a_3x}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-2a_0x^1-\sum_{n=2}^{\infty}2a_{n-1}x^n=0$$

گام پنجم : یکی کردن سیگماها :

$$(2a_2+6a_3x-2a_0x)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-2a_{n-1}\right]x^n=0$$

گام آخر : نوشتن رابطه بازگشتی :

عدد ثابت = 0 $\longrightarrow$ $2a_2=0 \rightarrow a_2=0$

ضریب $x$ = 0 $\longrightarrow$ $(6a_3)-(2a_0)=0 \rightarrow a_3=\frac{1}{3}a_0$

ضریب $x^n$ = 0 $\longrightarrow$ $(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-2a_{n-1}=0$

$(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n-1-2)a_{n-1} \rightarrow$ رابطه بازگشتی $n=1,2,3,\ldots$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

سوالات امتحانی: 92/10/22 ، 91/11/8 ، 91/6/12

5 سوال) $y'' + 3xy' + 3y = 0$ ؛ حول $x=0$

گام اول: جایگذاری $y, y', y''$ بصورت زیر در معادله:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; ; \; y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \; ; \; y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام دوم: جملات پشت سیگما را داخل می‌آوریم:

$$\underline{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$

جایگذاری $n$ با $n-2$

گام سوم: باید تمام توان $x$ ها $n$ باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$

گام چهارم: حد پایین تمام سیگماها باید بیشترین n یعنی n=1 باشد:

$$\overbrace{(0+2)(0+1)a_2x^0}^{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}3na_nx^n + 3a_0x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}3a_nx^n = 0$$

گام پنجم: یکی کردن سیگماها:

$$(2a_2+3a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3na_n + 3a_n\right]x^n = 0$$

گام آخر: نوشتن رابطه بازگشتی:

عدد ثابت $= 0 \to 2a_2 + 3a_0 = 0 \to a_2 = -\frac{3}{2}a_0$

$x^n$ ضریب $= 0 \to (n+2)(n+1)a_{n+2} = (3n+3)a_n \quad (n \geq 1)$ رابطه بازگشتی

$n=1 \to (1+2)(1+1)a_{1+2} = (3\times1+3)a_1 \to 6a_3 = 6a_1 \to a_3 = a_1$

$n=2 \to (2+2)(2+1)a_{2+2} = (3\times2+3)a_2 \to 12a_4 = 9a_2 \to a_4 = \frac{9}{12}a_2 \to a_4 = \frac{3}{4}a_2$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

6 (مثال) $y''+(x-1)y'-y=0$ ; حول $x=0$

حل: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم: $y''+xy'-y'-y=0$

گام اول: جایگذاری $y'' , y' , y$ بصورت زیر در معادله:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;;\; y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \;;\; y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام دوم: جملات پشت سیگما را داخل می‌آوریم:

شیفت عقب

شیفت جلو

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{\text{جایگذاری n با n-2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

شیفت عقب ها

گام سوم: باید توان تمام x ها n باشد واین کار را با شیفت دادن n انجام میدهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام چهارم: حد پایین تمام سیگماها باید بیشترین n یعنی n=1 باشد:

$$\overbrace{(0+2)(0+1)a_2x^0}^{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - a_1x^0 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - a_0x^0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

گام پنجم: یکی کردن سیگماها:

$$(2a_2 - a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - (n+1)a_{n+1} - a_n\right]x^n = 0$$

گام آخر: نوشتن رابطه بازگشتی:

عدد ثابت $= 0 \rightarrow \quad 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \quad ; -a_1 - a_0 = 0 \rightarrow a_1 = a_0$

ضریب $x^n = 0 \rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - (n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n \geq 1)$

Nasim