DATE / / SUBJECT: $y''^{3} + y'^{4} + y = x$: ۹۶/۷/۱۹

$F(y^{(3)}, y^{(2)}, y^{(1)}, x) = 0$ ODE ← معمولی

معادلات دیفرانسیل → با مشتق جزئی PDE

$\boxed{y = g(x)}$ $G(z'', z', y', y, x)$

$\boxed{z = h(y, x)}$

« ابزار ریاضی توصیف کننده‌ی طبیعت »

چه معادلاتی حل پذیرند؟

→ تحلیلی (روش‌های الگوریتمیک)

→ عددی: تقریباً هر معادله‌ای را می‌شود حل کرد (اجزای محدود)

منبع معادلات دیفرانسیل چیست؟ از کجا می‌آیند؟

این درس با حل مسئله جا می‌افتد.

مفهوم دیفرانسیل برای توابع تک متغیره:

$y = f(x)$

$dy = ?$ $\quad dy = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $\quad \Delta x \triangleq dx$

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

در تک متغیره: $\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

یعنی نسبت به x مشتق بگیر

مثال: $f(x,y) = x^2 y + \sin(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \cos(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow df = \underbrace{(2xy + \cos(x))}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x^2)}_{N(x,y)} dy = 0$$

ضرایب همان ضرایب بسط دوجمله‌ای (مثلث خیام - پاسکال)

$$\begin{matrix} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & = 11^2 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 = 11^3 \end{matrix}$$

$$df = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$d^2 f = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

نماد

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3}$$

"گذاشتن ۳ در صورت مشتق"

dx^3 یعنی $dx \times dx \times dx$ که توان است

$$(1-x)^{n=3} = 1 - 3x + 3x^2 \; x^3$$

$$(1-x)^{0.5} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 - \ldots\ldots$$

مشتق مرتبه‌ی n به صورت یک انتگرال پیچیده ظاهر می‌شود.

مرتبه: عبارتی که بزرگترین مشتق را دارد ← مرتبه‌ی ۲ $\quad (y'')^5 + y^7 + x = 0$

درجه: برحسب همون عبارتی است که برای مرتبه به کار رفت. درجه‌ی ۵

فقط برای چند جمله‌ای‌ها درجه تعریف می‌شود.

معادله‌ی دیفرانسیل خطی ← درجه‌ی ۱

معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم با ضرایب غیر ثابت $\quad y'' + \sin(x) y' + 2y = f(x)$

y^2 و $y'y$ و $y''y$ داریم اگر توانی غیر از یک از y یا y' یا y'' داشتیم دیگر خطی نبود.

مدل نمایش اول $\quad y' = f(x,y) = x^2 y$

$$\parallel$$

مدل نمایش دوم $\quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

۱- تفکیک متغیرها

مرتبه ی n ← n عدد صحیح ثابت

به اندازه ی مرتبه ی معادله به شرایط اولیه نیاز داریم .

$$y'' = x$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

مسئله ی دیفرانسیل یعنی شرایط اولیه را جاگذاری کنیم و جواب را پیدا کنیم . اما معادله ی دیفرانسیل یعنی صرفاً حل معادله

اشکالات بچه‌ها در امتحانات چند سال گذشته :

(۱) $(x - c_1)^2 + y^2 = c_2$

(۲) $(x - c)^2 + y^2 = c$ $\frac{1}{\cos(x)}$

(۳) $y = c(\sec x + \tan x)$ مسیرهای متعامد ؟

← باید آن را پیدا کنیم و بعد قرینه و معکوس کنیم . چون شیب عمود قرینه و معکوس است .

معادله ی دیفرانسیلی باید پیدا کنید که در آن c_1 و c_2 نباشد . از اولی باید دوبار مشتق می گرفتیم .

مشتق مرتبه ی دوم نسبت به مکان y'' مشتق مرتبه ی دوم نسبت به زمان $\ddot{y}$

(۱) $2(x - c_1) + 2yy' = 0$ یا $2(x - c_1)\,dx + 2y\,dy$ $(\div dx)$

$\times \mid 2 + 2y'^2 + 2yy'' = 0$

« نباید مشتق دوباره می گرفتیم چون از مرتبه ی اول بودن خارج می شد »

« این c را در معادله ی دوم قرار دهیم » $c = x + yy'$

(۲) $(x - (x + yy'))^2 + y^2 = x + yy'$

(۳) $y' = c\left(\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + (1+\tan^2(x))\right)$

اگر C نبود قرینه و معکوس آن رای یا منتگرو کار تمام بوده

می خواهیم c نباشد. معادلات را برهم تقسیم می کنیم:

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)}}{\sec(x) + \tan(x)}\right) \qquad y' = y\left(\ldots \right)$$

هدف در اینجا حذف ضریب ثابت بود.

سؤال: جواب معادله‌ی دیفرانسیل؟ $\operatorname{Ln}\left(\frac{y'}{x}\right) = y - x^2$

$$\frac{y'}{x} = e^{y-x^2} = \frac{e^y}{e^{x^2}} \Rightarrow \frac{y'}{e^y} = \frac{x}{e^{x^2}}$$

$$\rightarrow \int \frac{y'}{e^y} = \int_{x_0}^{x} \frac{t\,dt}{e^{t^2}}$$

تابع همگن: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{x}{x+\sqrt{xy}} \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda x + \sqrt{(\lambda x)(\lambda y)}} = f(x,y)$$

$$\underbrace{y'' + 2y' + y}_{\text{کش همگن معادله}} = x^2$$

۲_ معادلات همگن

مثال: $x^2 y' = 3(x^2+y^2)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + xy$

تبدیل: $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

DATE / / SUBJECT:

$$\Rightarrow y' = ۳\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^۲\right) \cdot \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow u'x + u = ۳(1+u^۲)\tan^{-1}(u) + u$$

$$\frac{u' \rightsquigarrow \frac{du}{dx}}{(1+u^۲)\tan^{-1}(u)} = \frac{۳}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{(1+u^۲)\tan^{-1}(u)} = \int \frac{۳dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|\tan^{-1}(u)| = ۳\ln x + c$$

فروردین ۹۵:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲x-y}{x+۲y} \xrightarrow[\text{تقسیم بر } x]{\text{طرفین}} \frac{۲-\left(\frac{y}{x}\right)}{1+۲\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \frac{y}{x} = u$$

$$u'x + u = \frac{۲-u}{1+۲u}$$

سؤال: آخرین راه همیشه تغییر متغیره

$$y' = \sin(x-y)$$

$$\Downarrow$$

بگیرید: $x-y=u \rightarrow u' = -y'+1$, $y' = 1-u'$

$$۱ - u' = \sin(u)$$

$$u' - 1 = -\sin(u)$$

$$\frac{u'}{1-\sin u} = 1 \rightsquigarrow \int \frac{u'}{1-\sin u} = \int 1$$

۳_ معادلات کامل (کامل پذیر)

۴_ معادلات خطی مرتبه ی اول

Sahand