

به نام خدا



دانشکده علوم ریاضی

تاریخ: ۹۶/۹/۹
شماره:
پیوست:

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

۲۲-۰۳۴

نیمسال اول ۹۶-۹۷

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y' + \frac{y}{t} = \frac{\ln t}{t} \quad (t > 0)$$

سؤال ۲. مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ty' + 2y + (\sin t)\sqrt{y} = 0 & (t > 0, y > 0) \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

سؤال ۳. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = \frac{y}{t^6 + t} \quad (t > 0)$$

عامل انتگرال‌سازی را به شکل $\mu(t, y) = t^\alpha y^\beta$ پیدا کنید که این معادله را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کند و سپس جواب عمومی معادله داده شده را به صورت صریح مشخص کنید.

سؤال ۴. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$ty'' + 2y' + ty = 1 \quad (t > 0)$$

(الف) عدد حقیقی r را طوری تعیین کنید که $y_1 = t^r \sin t$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل همگن متناظر باشد.

(ب) با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب y_2 (مستقل خطی با y_1) از معادله دیفرانسیل همگن متناظر را به دست آورید.

(ج) با استفاده از روش تغییر پارامتر، یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده را بیابید و سپس جواب عمومی آن را بنویسید.

سؤال ۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$4y'' + 4y' + y = e^{-t/2}(144t^2 + 48t - 8)$$

با استفاده از روش حدسی، یک جواب خصوصی از این معادله را به دست آورید و سپس جواب عمومی آن را بنویسید.

سؤال ۶. فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$: q تابعی پیوسته باشد طوری که $\int_0^\infty |q(t)| dt < \infty$ و معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + q(t)y = 0 \quad (t \geq 0)$$

(الف) اگر y یک جواب کراندار از معادله دیفرانسیل داده شده باشد، نشان دهید $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)$ موجود و برابر با صفر است.

(ب) نشان دهید معادله دیفرانسیل داده شده لااقل یک جواب دارد که کراندار نیست.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۰ نمره،

سؤال ۲: ۱۵ نمره،

سؤال ۵: ۱۵ نمره،

سؤال ۲: ۱۰ نمره،

سؤال ۴: ۵+۵+۱۰ نمره،

سؤال ۶: ۵+۵ نمره.

مجموع: ۸۰ نمره