



تاریخ: ۹۶/۱۰/۲۷

شماره: .....

پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

۲۲-۰۳۵

نیمسال اول ۹۶-۹۷

- این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. فرض کنید  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T = 2\pi$  است که روی بازه  $[-\pi, \pi)$  با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & : -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} & : x = -\pi, 0 \\ x & : 0 < x < \pi \end{cases}$$

(الف) سری فوریه  $f$  را به دست آورید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، برای هر  $0 \leq x \leq \pi$ ، حاصل سری‌های زیر را به دست آورید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^2}$$

(ج) با استفاده از قسمت (ب)، حاصل سری زیر را به دست آورید:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$



سؤال ۲. فرض کنید  $f$  تابعی است که روی بازه  $[0, \infty)$  با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & : 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & : x > \pi \end{cases}$$

(الف) انتگرال فوریه سینوسی  $f$  را به دست آورید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(\frac{\pi x}{4})}{1-x^2} dx$$

سؤال ۳. تبدیل فوریه تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = e^{-ax^2}$  را محاسبه کنید ( $a > 0$ ).

سؤال ۴. مسأله زیر را به شکل کانونیک تبدیل کرده و آن را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & : -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 & : -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = x + 1 & : -\infty < x < \infty \end{cases}$$

سؤال ۵. مسأله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0 & : t > 0 \\ u_x(1, t) + u(1, t) = 0 & : t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{4} & : 0 < x < 1 \end{cases}$$

توزیع نمره. سؤال ۱:  $10+10+10$  نمره،

سؤال ۲:  $5+10$  نمره،

سؤال ۳:  $10$  نمره،

سؤال ۴:  $20$  نمره،

سؤال ۵:  $25$  نمره.

مجموع:  $100$  نمره