



تاریخ: ۹۶/۱۰/۳۰
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۲۲-۰۳۴

نیمسال اول ۹۶-۹۷

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. با استفاده از روش سری‌ها دو جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل زیر را به صورت سری‌هایی حول صفر به دست آورید. سپس با مشخص کردن اینکه این دو سری چه تابعی را نمایش می‌دهند، جواب عمومی معادله را بنویسید:

$$4ty'' + 2y' + y = 0 \quad (t > 0)$$

سؤال ۲. با استفاده از روش سری‌ها یک جواب از معادله دیفرانسیل زیر را به صورت یک سری حول صفر به دست آورید. سپس، با مشخص کردن اینکه این سری چه تابعی را نمایش می‌دهد، به کمک روش کاهش مرتبه جواب دوم (مستقل خطی با جواب اول) را محاسبه کرده و جواب عمومی معادله را بنویسید:

$$t(t-1)y'' + (3t-1)y' + y = 0 \quad (0 < t < 1)$$

سؤال ۳. با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس جواب مسأله زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} ty'' + (2t+3)y' + (t+3)y = 3e^{-t} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

سؤال ۴. تابع $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(t) = \begin{cases} \sin 2t & : 0 \leq t < \pi \\ 0 & : t \geq \pi \end{cases}$$

در نظر بگیرید و با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس جواب مسأله زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} y'' + y = f(t) + \delta(t - 2\pi) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

سؤال ۵. با استفاده از روش مقادیر ویژه و بردارهای ویژه جواب عمومی دستگاه $X' = AX$ را به دست آورید که در آن A ماتریس زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

سؤال ۶. فرض کنید $A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که درایه‌های آن توابعی از t هستند و علامت پریم، یعنی مشتق نسبت به t را نمایش دهد.

(الف) نشان دهید اگر $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$ ، آنگاه $(e^{A(t)})' = A'(t)e^{A(t)}$.

(ب) با استفاده از (الف) جواب عمومی دستگاه زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} x_1' = (-\sin t)x_1 + (-\cos t)x_2 \\ x_2' = (\cos t)x_1 + (-\sin t)x_2 \end{cases}$$

توزیع نمره. هر سؤال ۲۰ نمره دارد.

مجموع: ۱۲۰ نمره