

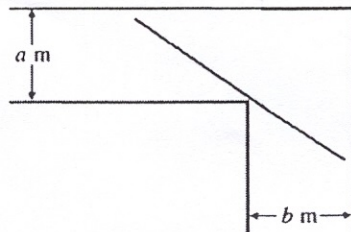
بسمه تعالی

تاریخ پنجشنبه ۲۸ دی ۱۳۹۶

امتحان پایان ترم
مدت: ۳ ساعت

ریاضیات عمومی ۱

۱ طول طویل‌ترین تیری را بیابید که بتواند به‌طور افقی از پیچ یک راهرو به عرض a متر به راهرو با عرض b متر حمل شود (مطابق شکل زیر، تیر عرض ندارد). (۲۰ نمره)



۲ اگر f بر $[a, b]$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$ ، نشان دهید

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)dx = -2 \int_a^b f(x)dx.$$

(۲۰ نمره)

۳ فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت باشد. برد تابع $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = (1 + \frac{a}{x})^x$ و نقاط ماکسیمم و مینیمم آن را مشخص کنید.

(۲۰ نمره)

۴ در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{2}{3}}}$ بحث کنید. (۲۰ نمره)

۵ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و ثابت $a \geq 0$ موجود باشد که برای هر x و هر $k = 0, 1, 2, \dots$ داشته باشیم $|f^{(k)}(x)| \leq a^k$. نشان دهید $f(x)$ در هر نقطه‌ای تحلیلی است، به عبارت دیگر $f(x)$ با سری تیلور خود حول هر نقطه‌ای برابر است. (۲۰ نمره)

۶ مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$ را حساب کنید. (۲۰ نمره)