

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی



مدت امتحان: ۳ ساعت
۲۷ آبان ۱۳۹۵

معادلات دیفرانسیل
امتحان میان ترم همه‌ی گروه‌ها

سوال ۱) معادله زیر را در نظر بگیرید

$$(ax + by) dx + (cx + dy) dy = 0$$

شرط لازم و کافی برای ضرایب بیابید که معادله بالا کامل باشد. سپس با شرط بدست آمده، آن را حل کنید. (۱۰ نمره)
سوال ۲) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y dx + x(1 - 3x^2 y^2) dy = 0 \quad (۱)$$

الف) نشان دهید این معادله کامل نیست. (۵ نمره)

ب) فرض کنید $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل ۱ باشد. با جایگذاری در معادله ۱، α و β مناسب را پیدا کنید. (۵ نمره)

ج) با استفاده از عامل انتگرال ساز بدست آمده در قسمت قبل، جواب عمومی معادله ۱ را بدست آورید. (۵ نمره)

سوال ۳)

الف) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم با ضرایب ثابتی به شکل

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y = 0$$

بیابید که توابع زیر در آن صدق کنند. توجه کنید $y^{(n)}$ یعنی مشتق مرتبه n ام. (۶ نمره)

$$e^t, \quad te^t, \quad e^{-t} \sin 2t, \quad e^{-t} \cos 2t$$

ب) با ضرایب بدست آمده در قسمت قبل، معادله ناهمگن زیر را بطور کامل حل کنید. (۹ نمره)

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y = e^t$$

سوال ۴) فرض کنید تابع $r(t)$ بر بازه $(0, +\infty)$ مشتق پیوسته دارد و تابع $y_1(t) = t$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''(t) + \frac{1}{t^2}y'(t) + r(t)y(t) = 0$ بر این بازه است.

الف) یک جواب دیگر $y_2(t)$ برای معادله $y''(t) + ty'(t) + r(t)y(t) = 0$ بدست آورید که $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مستقل خطی باشند. می توانید از روش کاهش مرتبه استفاده کنید. (۷ نمره)

ب) دلیلی برای مستقل بودن $y_1(t)$ و $y_2(t)$ پیشنهادی خود در قسمت قبل بیاورید. (۳ نمره)

سوال ۵)

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (2)$$

را در نظر بگیرید که همه ضرایب آن در بازه $I := [1, +\infty)$ پیوسته هستند. فرض کنید که $\phi_1(t) = 1$ و $\phi_2(t) = t$ و $\phi_3(t) = \ln t$ سه جواب معادله ۲ باشند.

الف) دو جواب مستقل خطی برای معادله $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ پیدا کنید. با استفاده از رانسکین این دو تابع، استقلال خطی آن دو را در بازه I نشان دهید. (۶ نمره)

ب) جواب عمومی معادله ناهمگن ۲ را بدست آورید. (۳ نمره)

ج) یک جواب خصوصی $\phi_4(t)$ برای معادله ۲ معرفی کنید که $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_4(t) = -\infty$. (۶ نمره)

سوال ۶) معادله زیر را در نظر بگیرید

$$y'(t) = (y(t))^{\frac{2}{3}} \quad y(0) = -1$$

همه جوابهای آن را برای $t \geq 0$ بدست آورید. (۱۵ نمره)

پیروز و سریلند باشید