حل مسائل امتحان آمار و احتمال مهندسی ۹۴/۱۰/۱۸

۱- متغیر تصادفی X دارای توزیع پیوسته و صعودی $F(x)$ در فاصله $[a,b]$ است $\left(F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx\right)$
اگر $Y=(F(x))^2$ باشد، مقدار $Var(Y)$ را بدست آورید.

حل

$X \sim f(x) \qquad a<x<b$

$F(x) = P(X \le x)$

$$E(Y) = E(F^2(x)) = \int_a^b F^2(x) f(x)\,dx = \frac{1}{3} F^3(x) \Big]_a^b =$$

$$= \frac{1}{3}\left[F^3(b) - F^3(a)\right] = \frac{1}{3}[1-0] = \frac{1}{3}$$

$$E(Y^2) = E(F^4(x)) = \int_a^b F^4(x) f(x)\,dx = \frac{1}{5} F^5(x) \Big]_a^b =$$

$$= \frac{1}{5}(1-0) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad Var(Y) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}.$$

۲/۵ نمره

۲) برای متغیر تصادفی X داریم $f(x+1) = P\cdot f(x)$ $(0\le P\le 1 ,\ x=0,1,2,\dots)$

تابع احتمال X را بدست آورید. $(x=1,2,3,\dots)$ برای

حل

$$f(1)=P\cdot f(0)$$
$$f(2)=P\,f(1)$$
$$\vdots$$
$$f(x)=P\,f(x-1)$$

$$f(x)=P^{x}f(0)$$

۲ نمره

$$f(0)=f(0)$$
$$f(1)=P\,f(0)$$
$$f(2)=P^{2}f(0)$$
$$\vdots$$
$$f(x)=P^{x}f(0)$$

$$1=f(0)\left[1+P+P^{2}+\dots P^{x}\right]\Rightarrow 1=f(0)\times\frac{1}{1-P}$$

پس $f(0)=1-P \Rightarrow f(x)=P^{x}(1-P)\quad x=0,1,2,\dots$

یا $f(x)=P^{x-1}(1-P)\quad x=1,2,\dots$ توزیع هندسی

۳) فرض کنید X طول عمر یک دستگاه رادیو برحسب سال باشد که به وسیله شرکتی ساخته شده و تابع چگالی آن به صورت $f(x)=\frac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}$ ، $x>0$ می‌باشد. احتمال اینکه از ۸۰ دستگاه از این نوع رادیو حداقل ۲۵ دستگاه آن بیشتر از ۱۵ سال عمر کنند را بدست آورید.

ح)

$$p=P(X>15)=\int_{15}^{\infty}\frac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}dx=\frac{1}{e}=0.37$$ (۰/۲۵ نمره)

$$Y\sim b(80,\,0.37)\Rightarrow P(Y\geq 25)=\sum_{y=25}^{80}\binom{80}{y}\left(\frac{1}{e}\right)^{y}\left(1-\frac{1}{e}\right)^{80-y}$$ (۱ نمره)

$$\approx P(T\geq 24.5)=P\left(Z>\frac{24.5-29.6}{4.3}\right)=P(Z>-1.14)=0.5+0.3729$$ (۱ نمره)

$$=0.8729$$

$$E(Y)=80\times 0.37=29.6$$

$$Var(Y)=80\times 0.37\times 0.63=18.648$$

$$>5\Rightarrow T\sim N(29.6,\,18.648)$$

۲/۵

۴) اگر X_i ها دو به دو مستقل بوده و دارای واریانس برابر باشند (σ^2) ضریب همبستگی X_i و $\bar{X} = \frac{\sum^n x_i}{n}$ را بدست آورید. $\left(\rho_{X_i , \bar{X}}\right)$

حل:
$$Cov(X_i , \bar{X}) = \frac{1}{n} Cov(X_i , \sum^n x_i) =$$

$$= \frac{1}{n} Cov(X_i , X_i) = \frac{1}{n} \times \sigma^2$$ (۱ نمره)

(۰/۵ نمره) $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ و $Var(X_i) = \sigma^2$

$$\therefore \quad \rho_{X_i , \bar{X}} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\left(\frac{\sigma^2}{n} \times \sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$ (۰/۵ نمره)

---

۲ نمره

(۲/۵ نمره)

۵) فاصله اطمینان ۹۵ درصد زیر را با استفاده از یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی برای میانگین یک جامعه نرمال بدست آورده‌ام [۱٫۲۵ و ۳٫۷۵] یک فاصله اطمینان ۹۰ درصد برای واریانس این جامعه بسازید.

حل

$$t_{0.025,24} = 2.0639$$

$$\begin{cases} \bar{X} - \dfrac{2.0639}{5} S^* = 1.25 \\ \bar{X} + \dfrac{2.0639}{5} S^* = 3.75 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{X} = 2.5 \quad S^* = 3.0284 \Rightarrow \boxed{S^{*2} = 9.17029}$$

(۱ نمره)

$$P_r\left(\frac{24 \times 9.17029}{\underbrace{36.42}_{\chi^2_{0.05,24}}} \le \sigma^2 \le \frac{24 \times 9.17029}{\underbrace{13.85}_{\chi^2_{0.95,24}}} \right) = 0.9$$

$$P_r\left(6.04 \le \sigma^2 \le 15.58 \right) = 0.9$$

(۱/۵ نمره)

(۳ نمره)

۶) برای تصمیم گیری درباره احداث یک کارخانه شیمیایی از ساکنان شهر و حومه آن نظرخواهی می‌شود. در نمونه‌ای ۲۰۰ تایی از ساکنین شهر ۱۲۰ نفر و در نمونه ۵۰۰ تایی از ساکنین حومه شهر ۲۴۰ نفر موافق با احداث کارخانه می‌باشند. الف) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای اختلاف نسبت بین موافقان شهر و حومه بدست آورید. ب) آزمون $H_0: P_1=P_2$ در مقابل $H_1: P_1 \neq P_2$ را در سطح معنی‌دار ۵ درصد انجام دهید.

حل

الف) (۱/۵ نمره)

$$p_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{120}{200} = 0/6 \quad , \quad p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{240}{500} = 0/48$$

$$P_r\left(p_1 - p_2 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}} \le P_1 - P_2 \le p_1 - p_2 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

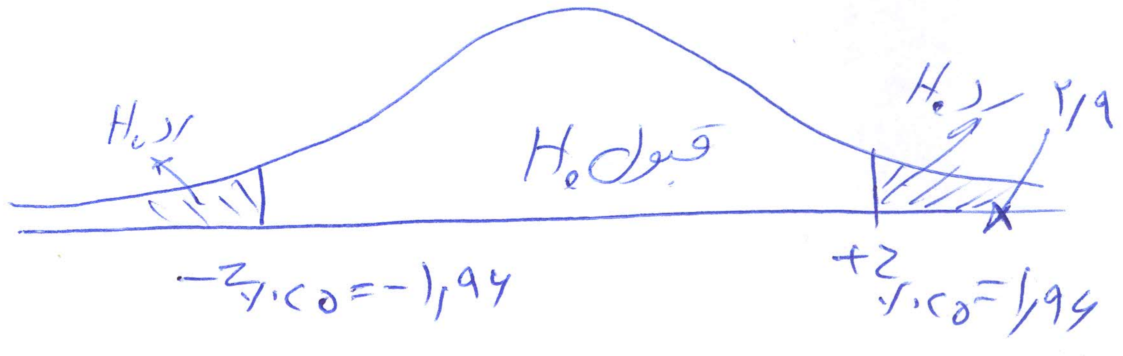
$$P_r\left(0/6 - 0/48 - 1/96\sqrt{\frac{0/6\times0/4}{200}+\frac{0/48\times0/52}{500}} \le P_1 - P_2 \le 0/6 - 0/48 + 1/96\sqrt{\frac{0/6\times0/4}{200}+\frac{0/48\times0/52}{500}}\right) = 0/95$$

$$\therefore P_r\left(0/03964 \le P_1 - P_2 \le 0/2003\right) = 0/95$$

ب) (۱/۵ نمره)

$$\hat{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2} = \frac{120+240}{200+500} = 0/51$$

$$H_0: P_1 = P_2 \qquad H_1: P_1 \neq P_2 \xrightarrow{\text{آماره آزمون}} Z = \frac{0/6-0/48}{\sqrt{(0/51)(0/49)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{500}\right)}} = 2/9$$



$\therefore$ H_0 را نمی‌پذیریم

۳ نمره

۷

نمونه‌هایی از بچه‌های ۶ و ۷ ساله آزمون استعداد تحصیلی داده شده و نتایج به صورت زیر خلاصه شده است. آیا می‌توان ادعا نمود که نتایج از یک جامعه نرمال باشند (۰/۰۵)

(با فرض نرمال بودن نمرات بچه‌های ۶ و ۷ ساله)

۷ ساله: $\bar{X}_1 = ۴۴$ $\quad S_1^* = ۱۳/۲$ $\quad n_1 = ۱۶$

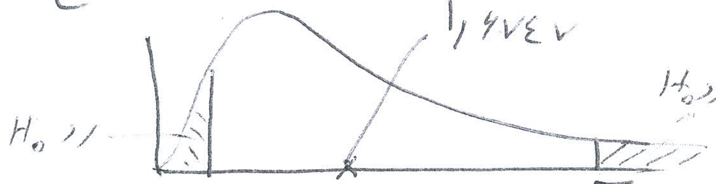
۶ ساله: $\bar{X}_2 = ۳۷/۵$ $\quad S_2^* = ۱۰/۲$ $\quad n_2 = ۱۱$

حل

الف) ۱/۵ نمره

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

آماره آزمون $F = \dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} = \dfrac{(۱۳/۲)^2}{(۱۰/۲)^2} = ۱/۶۷۴۷$ ۰/۰۵ نمره



$F_{۰/۰۲۵,۱۵,۱۰} = ۳/۵۲$

$F_{۰/۹۷۵,۱۵,۱۰} = \dfrac{1}{F_{۰/۰۲۵,۱۰,۱۵}} = \dfrac{1}{۳/۰۶} = ۰/۳۲۷$

۱ نمره

H_0 را می‌پذیریم

با فرض پذیرش H_0 در بند الف:

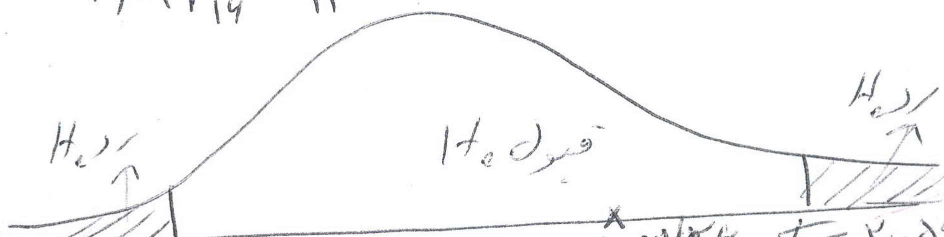
ب) ۱/۵ نمره ۰/۵ نمره

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$S_p^2 = \dfrac{۱۵(۱۳/۲)^2 + ۱۰(۱۰/۲)^2}{۲۵} = ۱۴۶/۱۶$

$S_p = ۱۲/۰۹$

آماره آزمون $T = \dfrac{۴۴ - ۳۷/۵}{۱۲/۰۹\sqrt{\frac{1}{۱۶} + \frac{1}{۱۱}}} = ۱/۳۷۲۶$ ۰/۵ نمره



$t_{۰/۰۲۵,۲۵} = ۲/۰۵۹۵$ ۰/۵ نمره

پس H_0 را می‌پذیریم در نتیجه از یک جامعه نرمال (اند)

(۲/۵ نمره)

۸) جدول زیر فهرستی از متراژ و قیمت فروش ۸ خانه را در منطقه‌ای از شهرداری زنجان نشان می‌دهد

X: متراژ (۱۰ متر مربع)	۲۴	۲۰	۱۶	۱۳	۱۶	۲۳	۳۸	۱۵
Y: قیمت فروش (میلیون تومان)	۲۶۵	۱۴۲	۱۶۰	۱۱۴	۱۳۰	۱۵۰	۲۲۸	۱۴۵

الف) آزمون فرضیه $H_0: \rho = 0$ در مقابل $H_1: \rho \neq 0$ را با فرض نرمال بودن X و Y در سطح معنی‌داری ۵ درصد انجام دهید.

ب) با استفاده از روش حداقل مربعات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را محاسبه کرده و قیمت را برای یک متراژ ۲۵ تخمین بزنید.

حل

الف) (۱/۵ نمره)

$\sum x = ۱۶۵$

$\sum y = ۱۳۳۴$

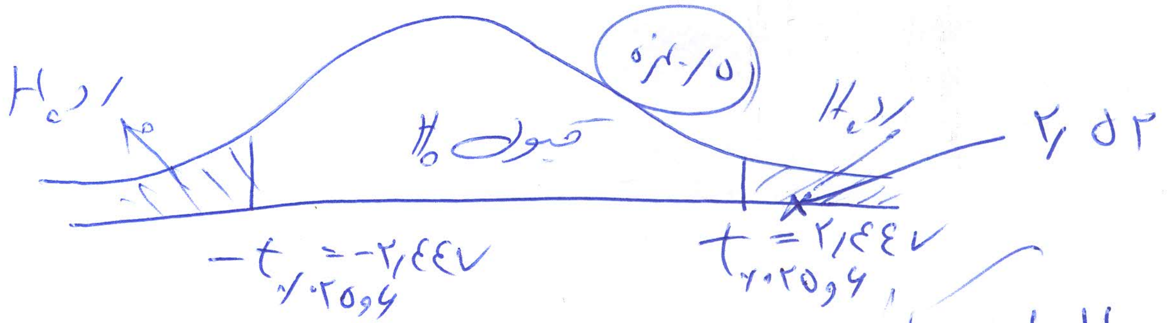
$\sum xy = ۲۹۶۱$

$\sum x^2 = ۳۸۵۵$

$\sum y^2 = ۲۴۱۳۹۴$

$R = ۰/۷۱۷$ (۰/۵ نمره)

$H_0: \rho = 0$, $H_1: \rho \neq 0$ (۰/۵ نمره) $\Longrightarrow$ آماره آزمون $T = R\sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}} = ۰/۷۱۷\sqrt{\frac{۸-۲}{۱-۰/۷۱۷^2}} = ۲/۵۲$



H_0 را رد می‌کنیم

ب) (۱ نمره)

$$\hat{\alpha} = ۷۱, \quad \hat{\beta} = ۴/۶۴ \Longrightarrow \hat{Y} = ۴/۶۴X + ۷۱$$

$$\hat{Y}\Big|_{X=۲۵} = ۴/۶۴(۲۵) + ۷۱ = ۱۸۷$$

توجه! محاسبه $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ و R با استفاده از ماشین حساب مجاز است.