

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

جمع نمرات: ۱۰۰

مدت امتحان: ۳ ساعت

دی ماه ۱۳۹۵

* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

هر سوال ۲۰ نمره دارد.

۱- (الف) (۱۲ نمره) سری فوریه‌ای کسینوسی به دست آورید که در بازه‌ی $[0, 1]$ به تابع $f(x) = x$ همگرا باشد.

(ب) (۵ نمره) با استفاده از این سری فوریه، مقدار $s_{\text{odd}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ را حساب کنید.

(پ) (۳ نمره) مقدار $s_{\text{even}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ و $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را تعیین کنید. (راهنمایی: کافی است از دو

رابطه‌ی بدیهی بین s_{odd} ، s_{even} و s کمک بگیرید).

در سوال‌های ۲ تا ۴ مسالهی معادله دیفرانسیل پاره‌ای داده شده را حل کنید.

۲- مسالهی حرارت ناهمگن

$$u_t = u_{xx} + 4x$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = t$$

$$u(x, 0) = 1$$

۳- مسالهی لاپلاس روی نیم‌دایره

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

$$u(r, 0) = 0$$

$$u(r, \pi) = 0$$

$$u(2, \theta) = \theta^2 - \pi\theta$$

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

۴- مسالهی موج روی صفحه مستطیل

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 2, t) = 0$$

$$u(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y$$

$$u_t(x, y, 0) = 0$$

۵- مسالهی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید. نیازی به ساده کردن انتگرال آخر (تبدیل وارون) نیست.

$$u_t = 4u_{xx}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

با آرزوی موفقیت