



تاریخ: ۹۵/۱۰/۳۰
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۳۰)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۹۶-۹۵

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx$

(ب) $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4} dx$

(ج) $\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$

سؤال ۲. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. نشان دهید $c \in [0, 1]$ موجود است طوری که $f(c) = c$.

سؤال ۳. (الف) حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به مثلثی در صفحه xy به رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(3, 0)$ حول محور y را بیابید.

(ب) طول منحنی تابع f با ضابطه $\int_1^2 \sqrt{5t^2 + 2t} dt$ از $x=1$ تا $x=2$ را بیابید.

سؤال ۴. با استفاده از انتگرال معین مقدار حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 0}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - (n-1)^2}} \right)$$

سؤال ۵. برای هر یک از سری‌های داده شده در زیر، مشخص کنید کدام همگرایی مطلق است، کدام همگرایی مشروط است و کدام واگرا.

(الف)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

(ب)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{-n}$$

(ج)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n) \sqrt{\ln(\ln n)}}$$

(د)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

سؤال ۶. با استفاده از سری هندسی، مجموع سری عددی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

سؤال ۲: ۱۰ نمره،

سؤال ۴: ۱۰ نمره،

سؤال ۶: ۱۰ نمره.

سؤال ۱: ۲۰ = ۷ + ۷ + ۶ نمره،

سؤال ۳: ۲۰ = ۱۰ + ۱۰ نمره،

سؤال ۵: ۳۰ = ۷ + ۶ + ۷ + ۱۰ نمره،

مجموع: ۱۰۰ نمره