بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

تاریخ: ۲۸ آبان ۱۳۹۴
مدت امتحان: ۲ ساعت و نیم
گروه‌های ۱-۱۶
اسماعیلی- فیروزی- مجتهدی

۱. (۱۵ نمره) معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' - y^2 = -2xy + x^2$$

جواب. معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$y' = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

در این صورت با اعمال تغییر متغیر $u := x - y$ خواهیم داشت

$$u' = 1 - u^2.$$

اکنون با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم

$$\frac{du}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{2}[\frac{du}{1-u} + \frac{du}{1+u}] = dx.$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق داریم

$$\frac{1}{2}\ln|\frac{1+u}{1-u}| = x + c$$

با ساده‌سازی عبارت بدست آمده و نهایتا جایگذاری $u = x - y$خواهیم داشت

$$y = x + \frac{1 - e^{2x}c}{1 + e^{2x}c}.$$

۲. (۱۵ نمره) جواب عمومیِ معادله‌ی دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$ydx + (2x - ye^y)dy = 0$$

جواب. ابتدا کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم.

$$۱ = M_y \neq N_x = ۲$$

معادله کامل نیست ولی عامل انتگرال سازی بر حسب y دارد زیرا

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{۱}{y}.$$

این عامل انتگرال ساز عبارت است از $y = e^{\int \frac{1}{y}dy}$. با ضرب طرفین معادله در y معادله جدید کامل خواهد شد. بنابرین تابع Ψ موجود است به طوری که

$$\Psi_x = M = y^۲, \quad \Psi_y = N = ۲xy - y^۲e^y.$$

با انتگرال گیری از معادله اول نسبت به xخواهیم داشت

$$\Psi(x, y) = xy^۲ + h(y).$$

سپس با مشتق‌گیری از Ψ نسبت به y و تساوی آن با تابع N، تابع مجهول h را به صورت زیر بدست می‌آوریم(برای محاسبه انتگرال h دوبار از انتگرال‌گیری جز به جز استفاده کنید).

$$h(y) = e^y(-y^۲ + ۲y - ۲).$$

نهایتا جواب معادله عبارت است از

$$\Psi(x, y) = xy^۲ + e^y(-y^۲ + ۲y - ۲) = c.$$

۳. فرض کنید $\{y_۱, y_۲\}$ مجموعه‌ی اساسی از جواب‌های معادله‌ی $y'' + \cos(t)y' + e^t y = ۰$ باشند. همچنین فرض کنید $۲y_۱ - y_۲$ و $y_۱ - y_۲$، به ترتیب جواب‌هایی از مسأله‌های مقدار اوّلیّه‌ی $\begin{cases} y(۰) = ۱ \\ y'(۰) = -۲ \end{cases}$ و $\begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y'(۰) = ۱ \end{cases}$ باشند.

(آ) (۱۰ نمره) مقدار رانسکینِ $y_۱$ و $y_۲$ را در نقطه‌ی $t = ۰$ به‌دست آورید.

جواب. از آن‌جا که $۲y_۱ - y_۲$ جواب مسأله‌ی مقدار اوّلیّه‌ی $\begin{cases} y(۰) = ۱ \\ y'(۰) = -۲ \end{cases}$ است، داریم: $\begin{cases} ۲y_۱(۰) - y_۲(۰) = ۱ \\ ۲y'_۱(۰) - y'_۲(۰) = -۲ \end{cases}$.

از آن‌جا که $y_۱ - y_۲$ جواب مسأله‌ی مقدار اوّلیّه‌ی $\begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y'(۰) = ۱ \end{cases}$ است، داریم: $\begin{cases} y_۱(۰) - y_۲(۰) = ۰ \\ y'_۱(۰) - y'_۲(۰) = ۱ \end{cases}$.

حال دو دستگاهِ دو معادله و دومجهولی داریم:

$$\begin{cases} ۲y_۱(۰) - y_۲(۰) = ۱ \\ y_۱(۰) - y_۲(۰) = ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲y'_۱(۰) - y'_۲(۰) = -۲ \\ y'_۱(۰) - y'_۲(۰) = ۱ \end{cases}$$

با حل این دو دستگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} y_۱(۰) & y_۲(۰) \\ y'_۱(۰) & y'_۲(۰) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۳ & -۴ \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad W(y_۱, y_۲)(۰) = -۴ + ۳ = -۱$$

(ب) (۵نمره) مقدار رانسکینِ $y_۱$ و $y_۲$ را در نقطه‌ی دل‌خواهِ t به‌دست آورید.

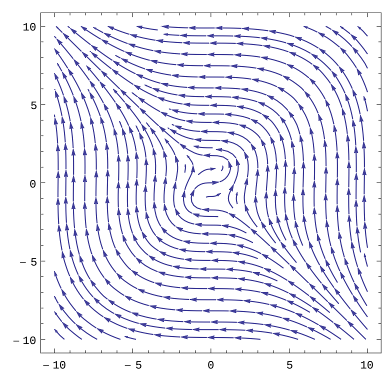
جواب. طبق قضیه‌ی آبل داریم:

$$W(y_۱, y_۲)(t) = ce^{-\int_۰^t \cos(s)ds} = ce^{-\sin(t)}$$

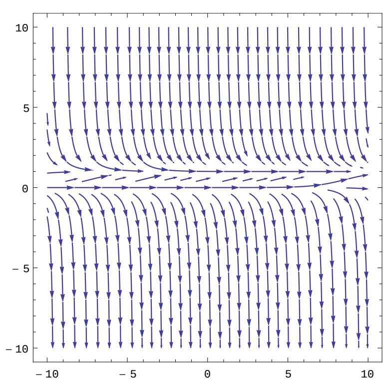
حال از آن‌جا که $W(y_۱, y_۲)(۰) = -۱$ می‌توان نتیجه گرفت $c = -۱$ و بنابراین

$$W(y_۱, y_۲)(t) = -e^{-\sin(t)}$$

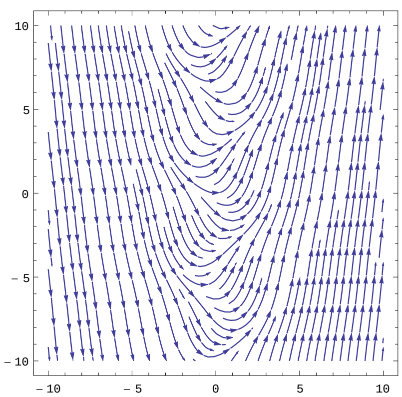
۴. (آ) (۵نمره) کدام‌یک از اشکال زیر میدان جهت برای معادله‌ی دیفرانسیلِ $y' = \sin(y) + t$ است؟



(اول)



(دوم)



(سوم)

جواب. از معادله معلوم است که شیبِ خطِ مماس بر نمودار جواب معادله یعنی y'، برابر با عددی بین $t + ۱$ و $t - ۱$ می‌باشد. و این به معنی این است که شیب خط مماس، برای $t > ۲$ باید عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. تنها میدانِ جهتی که دارای این خاصیت است، شکل سوم است. پس شکلِ (سوم) میدان جهت معادله‌ی مذکور را نمایش می‌دهد. (توضیح: با توجّه به این‌که در صورت سؤال برای پاسخ، دلیل خواسته نشده، جواب درست تنها ملاک نمره‌ی این سؤال است)

(ب) (۵نمره) از روی میدان جهت، رفتار جوابِ مسأله‌ی مقدار اوّلیّه‌ی $y(۰) = -۵$ را توصیف کنید. (رفتار تابع در $\pm\infty$)

جواب. با توجه به میدان جهت شکل سوم، جوابی از معادله که از نقطه‌ی $(۰, -۵)$ می‌گذرد، در $\pm\infty$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

۵. (۱۵ نمره) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{۲} + ۲y^{۲}}{۲xy}$$

$$y(۱) = ۱$$

جواب. معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$y' = \frac{۱ + ۲(\frac{y}{x})^{۲}}{۲\frac{y}{x}}$$

در این صورت با اعمال تغییر متغیر $v := \frac{y}{x}$ خواهیم داشت

$$y' = v + v'x = \frac{۱ + ۲(v)^{۲}}{۲v}.$$

اکنون با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم

$$۲vdv = \frac{dx}{x}.$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق داریم

$$v^{۲} = \ln|x| + c$$

با ساده‌سازی عبارت بدست آمده و نهایتا جایگذاری $v := \frac{y}{x}$خواهیم داشت(با توجه به اینکه $x > ۰, y(۱) = ۱ > ۰$)

$$y = \sqrt{\ln x + ۱}.$$

۶. (۱۰ نمره) فرض کنید $\{y_۱, y_۲\}$ مجموعه‌ی اساسی از جواب‌ها برای یک معادله‌ی همگنِ خطیِ مرتبه دوم باشند. شرط لازم و کافی برای این‌که $\{ay_۱ + by_۲, cy_۱ + dy_۲\}$ مجموعه‌ی اساسیِ جواب برای همان معادله باشد را بیابید و ادعای خود را ثابت کنید.

جواب. شرط لازم و کافی این است که $ad - bc \neq ۰$.برای اثبات این موضوع رانسکین $ay_۱ + by_۲$ و $cy_۱ + dy_۲$ را محاسبه می‌کنیم. دو راهِ زیر برای این محاسبه وجود دارد:

راه حل اول: در محاسبات، از این خاصیت استفاده می‌کنیم که تابع دترمینان روی هر یک از ستون‌های ماتریس (با ثابت

نگه داشتن دیگر ستون‌ها) به صورت خطی عمل می‌کند.

$$W(ay_1+by_2, cy_1+dy_2) = \begin{vmatrix} ay_1+by_2 & cy_1+dy_2 \\ ay'_1+by'_2 & cy'_1+dy'_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} y_1 & cy_1+dy_2 \\ y'_1 & cy'_1+dy'_2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y_2 & cy_1+dy_2 \\ y'_2 & cy'_1+dy'_2 \end{vmatrix} =$$
$$= a\left(c\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y'_1 & y'_1 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}\right) + b\left(c\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ y'_2 & y'_1 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y'_2 & y'_2 \end{vmatrix}\right) =$$
$$= ad \times W(y_1,y_2) - bc \times W(y_1,y_2) = (ad-bc)\times W(y_1,y_2)$$

راه حل دوم:

$$\begin{bmatrix} ay_1+by_2 & cy_1+dy_2 \\ ay'_1+by'_2 & cy'_1+dy'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

بنابراین با توجه به این‌که تابع دترمینان روی حصل‌ضرب ماتریس‌ها توزیع می‌شود، داریم:

$$W(ay_1+by_2, cy_1+dy_2) = \begin{vmatrix} ay_1+by_2 & cy_1+dy_2 \\ ay'_1+by'_2 & cy'_1+dy'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = W(y_1,y_2)(ad-bc)$$

راه حل سوم: می‌توان مقدار $W(ay_1+by_2, cy_1+dy_2)$ را مستقیماً با استفاده از محاسبات طولانیِ دترمینانِ ماتریس زیر به دست آورد که باز هم به همان نتیجه می‌رسیم و البته این محاسبات را در این‌جا نمی‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} ay_1+by_2 & cy_1+dy_2 \\ ay'_1+by'_2 & cy'_1+dy'_2 \end{vmatrix}$$

موفق باشید.