به نام او و برای او

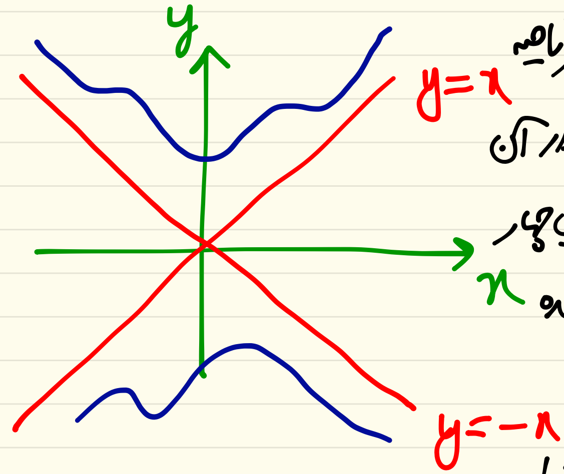
پاسخ سؤال‌های میان‌ترم دوم
ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۹۴–۹۳

دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

پاسخ سؤال اول

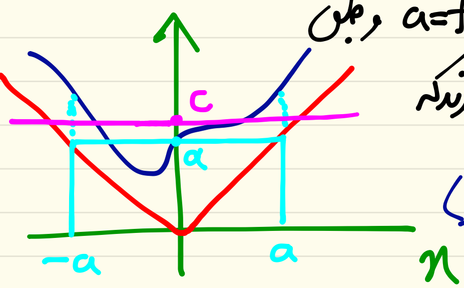
چون معادلهٔ $f(x)^2 = x^2$ جواب ندارد، هیچ x ای نیست که $f(x)=\pm x$.



نمودار تابع های $y=x$ و $y=-x$ صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند و چون تابع f نیز پیوسته است نمودار آن نمودار تابع های $y=\pm x$ را قطع نمی کند و در یکی از این چهار ناحیه قرار می گیرد. چون f روی کل $\mathbb{R}$ تعریف شده نمودار آن باید در یکی از ناحیه های مشخص شده روی شکل قرار داشته باشد. می توان فرض کرد نمودار f بالای نمودار تابع های $y=\pm x$ قرار دارد. (در غیر این صورت می توان آن را با تابع $-f$ جایگزین کرد)

(۱) این تابع پوشا نیست زیرا برای هر x داریم $f(x)\geq |x|$ و در نتیجه مقادیر منفی در تصویر تابع f قرار ندارند. (۵ نمره)

(۲) قرار دهید $a=f(0)$. با توجه به خواص f، $f(a)>a$ و $f(-a)>a$.



بنابراین عدد c وجود دارد که $a=f(0)<c<f(a), f(-a)$ و طبق قضیه مقدار میانی $0<x_1<a$ و $-a<x_2<0$ وجود دارند که $f(x_1)=c=f(x_2)$. بنابراین f یک به یک نیست (۵ نمره)

۳. در قسمت قبل دو نقطهٔ متمایز x_1 و x_2 یافت شدند $f(x_1)=f(x_2)$. بنابر قضیهٔ رل
نقطه‌ای بین آن‌ها هست که مشتق تابع f در آن‌جا صفر می‌شود. (۵ نمره)

۴. تابع پیوستهٔ $g(x)=\alpha x+(a+1)$ را در نظر بگیرید که در آن $-1<\alpha<1$

واضح است که $g(0)>a=f(0)$ و نمودار تابع g در دو نقطه نمودار تابع $y=|x|$ را قطع می‌کند

بنابراین نقاط $x_3<0<x_4$ یافت می‌شوند که $g(x_3)<|x_3|<f(x_3)$
$g(x_4)<|x_4|<f(x_4)$

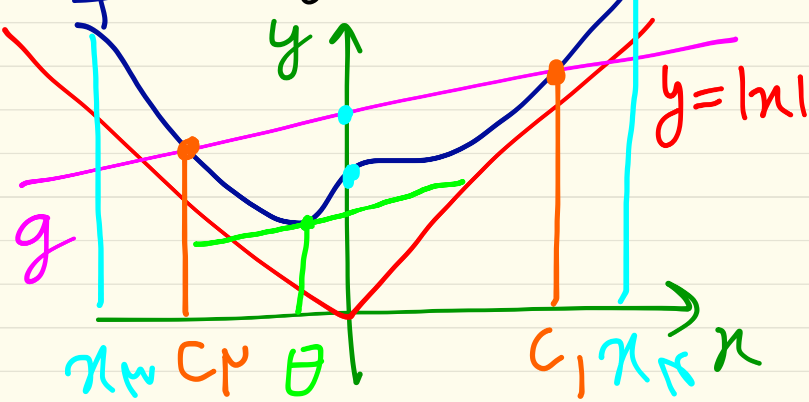
بنابراین با دوبار استفاده از قضیهٔ مقدار میانی برای بازه‌های $[0,x_4]$ و $[x_3,0]$

نقاط $c_1\in(0,x_4)$ و $c_2\in(x_3,0)$ وجود دارند که $f(c_1)=g(c_1)$
$f(c_2)=g(c_2)$

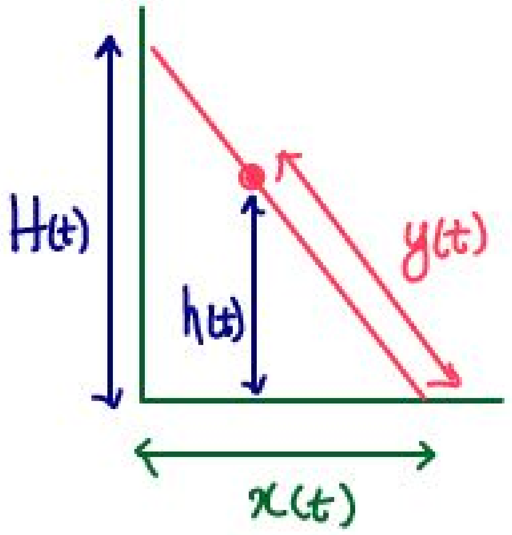
بنابراین طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه‌ای مانند $\theta\in(c_1,c_2)$ وجود دارد که

$f'(\theta)=g'(\theta)=\alpha$

(۵ نمره)



پاسخ سؤال دوم



فرض کنید تابع های $x(t)$ و $y(t)$ و $H(t)$ و $h(t)$ فاصله های مشخص شده در شکل در زمان t باشند. با توجه به اینکه طول نردبان ۴ است و بنا به قضیه تالس داریم:

$$H(t)=\sqrt{16-x(t)^2}$$

$$h(t)=\frac{y(t)}{4}\cdot H(t)$$

همچنین طبق اطلاعات مسئله داریم: $x(t)=d_0+t$, $y(t)=2+t/2$

نمره ۱۵

به این ترتیب تابع ارتفاع گربه (یعنی $h(t)$) به صورت زیر است:

$$h(t)=\frac{1}{8}\sqrt{16-(t+d_0)^2}\cdot(4+t) \qquad 0\leq t\leq 4-d_0$$

حال باید برای هر یک از حالت های $d_0=2$ و $d_0=2.5$ بیشترین مقدار ممکن تابع بالا را بیابیم.

$$h'(t)=\frac{1}{8}\,\frac{(16-(t+d_0)^2)-(t+d_0)(t+4)}{\sqrt{16-(t+d_0)^2}} \qquad (\star)$$

۳

$$h'(t)=0 \Rightarrow (t+d_0)(2t+4+d_0)=16$$

۲

الف: $d_0=2 \Rightarrow t=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$ $\qquad t_0=\frac{\sqrt{33}-5}{2}$

علامت $h(t)$ از روی علامت صورت کسر $(\star)$ مشخص می‌شود که یک چندجمله‌ای درجه ۲ با ضریب پیشرو منفی است و دو ریشه متمایز دارد که یکی از آنها در بازه مورد نظر ما ($0<t<2$) قرار دارد. یعنی $h'(t)$ برای t های کوچکتر از $\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$ مثبت و برای tهای بزرگتر از آن منفی است بنابراین $h(t)$ در این نقطه بیشترین مقدار را خواهد داشت. در نتیجه بیشترین ارتفاع گربه برابر است با

$$\frac{1}{8}\left(\sqrt{16-\left(\frac{\sqrt{33}-1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{33}+3}{2}\right)\right)$$

۲ توضیح اینکه چرا h در t_0 بیشترین مقدار است

می‌توانستیم تنها با مقایسه مقدار h در t_0 و $t=0$ و $t=2$ نیز متوجه شویم که بیشترین مقدار تابع h در t_0 اتفاق می‌افتد

ب : $d_0 = ۲/۵$

چندجمله‌ای درجهٔ ۲ صورت کسر (*) برای $t \geq 0$ منفی است (زیرا مقدار این چندجمله‌ای در $t=0$ منفی می‌شود و همهٔ ضرایب t و t^2 نیز منفی هستند) بنابراین $h'(t)=0$ در بازهٔ مورد نظر ما هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد و تابع در این بازه نزولی اکید است بنابراین بیشترین مقدار تابع h در همان ابتدا یعنی $t=0$ اتخاذ می‌شود. در این حالت بیشترین ارتفاع گربه برابر است با

$$h(0) = \frac{1}{۸}\sqrt{\frac{۳۹}{۴}} \cdot ۴ = \frac{\sqrt{۳۹}}{۴}$$

۳

اینکه h' در این بازه صفر نمی‌شود و بررسی نقاط مرزی

یا اینکه توضیح نزولی بودن h

پاسخ سؤال سوم

سؤال ۳ :

الف: تابع $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ یک تابع مشتق پذیر است و داریم:

$$\tan'\theta = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} > 0 \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

بنابراین این تابع اکیداً صعودی است و وارون دارد و چون مشتق آن هیچ جا صفر نمی‌شود وارون آن نیز مشتق پذیر است و داریم.

$$\mathrm{Arctan}(\tan\theta) = \theta \Rightarrow$$

$$\mathrm{Arctan}'(\tan\theta)\cdot\tan'\theta = 1 \Rightarrow \qquad \mathrm{Arctan}'(\tan\theta) = \frac{1}{1+(\tan\theta)^2}$$

(۰/۵ نمره)

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x = \tan\theta)$$

(۰/۵ نمره)

ب: $0 < \sqrt{3} - 1.7 = \frac{(\sqrt{3}-1.7)(\sqrt{3}+1.7)}{(\sqrt{3}+1.7)} = \frac{3-(1.7)^2}{\sqrt{3}+1.7} < \frac{0.11}{2\times 1.7} = \frac{0.11}{3.4} < \frac{1}{30}$

ج: $p = \sqrt{3}$, $h = 1.7 - p$ $\qquad f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$

$$f(1.7) = f(p) + f'(p)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}(1.7 - \sqrt{3})}_{\text{تقریب خطی}} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}h^2}_{\text{خطای تقریب خطی}} \qquad 1.7 < c < \sqrt{3}$$

حال باید نشان دهیم خطای تقریب کمتر از 2×10^{-4} . برای پیدا کردن کران مناسب $|f''(c)|$ توجه می‌کنیم که $(1+x^2)^2$ برای مقادیر مثبت صعودی است:

$$\left|\frac{1}{2}f''(c)h^2\right| < \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{(1+1.7^2)^2}\cdot\left(\frac{1}{30}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{(3.89\times 3)^2}\cdot\frac{1}{100}$$

(۰/۱۵ نمره)

$\sqrt{3} < 2$

$3.89 \times 3 > 10$ $\qquad \Rightarrow \left|\frac{1}{2}f''(c)h^2\right| < \frac{2}{100}\cdot\frac{1}{100} = 2\times 10^{-4}$

د : تقریب تیلور مرتبه K برای $f(1.7)$ در نقطه p برابر است با

$$f(1.7)=\underbrace{f(p)+f'(p)\cdot h+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}h^{k}}_{\text{تقریب تیلور مرتبه K}}+\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}h^{k+1} \qquad 1.7<c<p=\sqrt{3}$$

برای اینکه خطای این تقریب از 10^{-5} کمتر باشد باید $\left|\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}h^{k+1}\right|<10^{-5}$. تقریب تیلور مرتبه ۱ (یعنی تقریب خطی) خطای بزرگتر از این داشت. بنابراین $K=2$ را بررسی می‌کنیم:

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Longrightarrow |f^{(k+1)}(c)|<\frac{6\times3-2}{(1+1.7)^3}=\frac{16}{(3.89)^3}$$

$$\left|\frac{f^{(3)}(c)}{6}h^3\right|<\frac{1}{6}\cdot\frac{16}{(3.89)^3}\cdot\frac{1}{27}\cdot10^{-3}$$

$$=\frac{16}{6}\cdot\left(\frac{1}{3.89\times3}\right)^3\cdot10^{-3}<\frac{1}{3}\cdot10^{-6}<10^{-5}$$

بنابراین تقریب تیلور درجه ۲ دارای خطای کمتر از 10^{-5} است و داریم:

$$f(1.7)\simeq\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}(1.7-\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{16}(1.7-\sqrt{3})^2$$

(۱۰ نمره)