به نام او و برای او

پاسخ سؤال‌های امتحان پایان ترم

ریاضی عمومی ۱ (پاییز ۹۳)

① [۲۰ نمره]

(الف) [۱۰ نمره]

۴ نمره $\left\{ \quad \frac{2x}{1-x^4} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \right.$

۲ نمره $\left\{ \quad A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=1,\ D=0 \right.$

۴ نمره $\left\{ \quad \int \frac{2x}{1-x^4}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C \right.$

(ب) [۱۰ نمره]

۴ نمره $\left\{ \quad I = \int \underbrace{e^x}_{u}\, \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = -e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}\, \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} \right.$

۴ نمره $\left\{ \quad = -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int e^x \sin x\, dx}_{I} \right.$

بنابراین،

۲ نمره $\left\{ \quad I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) \right.$

[۲۰ نمره] ② هرگاه $f(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt$، داریم $f'(x)=g(b(x))b'(x)-g(a(x))a'(x)$

در مسئلهٔ داده شده داریم $b(x)=x$ ، $a(x)=\frac{x}{2}$ ، $g(x)=\frac{\sin x}{x}$. پس:

$$f'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sin x-\sin\frac{x}{2}}{x}$$

تابع $\sin(x)$ در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است، پس به ازای هر $x\in(0,\frac{\pi}{3})$، $\sin x > \sin\frac{x}{2}$ و در نتیجه $f'(x)>0$. بنابراین f در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است و ماکسیمم آن در انتهای بازه، یعنی $\frac{\pi}{3}$، رخ می‌دهد.

③ [۲۰ نمره]

[۱۰ نمره] (الف) برای هر $x\in\mathbb{R}$، با توجه به بسط تیلور مرتبهٔ اول همراه با جملهٔ خطا داریم:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2}e^{c}$$

که در آن c عددی بین ۰ و x است.

چون همواره $\frac{x^{2}e^{c}}{2}\geqslant 0$، پس $e^{x}\geqslant 1+x$.

[۱۰ نمره] (ب) با توجه به قسمت (الف) برای $x>-1$ داریم $x=\ln e^{x}\geqslant \ln(1+x)$.

پس $\ln(1+\frac{1}{n^{2}})\leqslant\frac{1}{n^{2}}$. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ همگرا است، بنابر آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^{2}})$ همگرا است.

---

④ [۲۰ نمره]

[۱۰ نمره] (الف)

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{3}+\cdots$$

[۱۰ نمره] (ب) قرار دهید:

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{\sin^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n}$$

$x_0\in\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به خطای تقریب چندجمله‌ای تیلور داریم: ۵ نمره

$$|\sin(x_0)-S_m(x_0)|=\frac{\sin^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\left|x_0-\frac{\pi}{4}\right|^{m+1}$$

که در آن ξ عددی بین x_0 و $\frac{\pi}{4}$ است.

چون همواره $|\sin^{(m+1)}(\xi)|\leqslant 1$، پس ۵ نمره

$$|\sin(x_0)-S_m(x)|\leqslant\frac{|x_0-\frac{\pi}{4}|^{m+1}}{(m+1)!}$$

چون $\lim_{m\to\infty}\frac{|x_0-\frac{\pi}{4}|^{m+1}}{(m+1)!}$، پس

$$\lim_{m\to\infty}S_m(x_0)=\sin(x_0)$$

⑤ [۲۰ نمره]

۱۰ نمره

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n)-\ln(k)}{\sqrt{nk}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{n}{k}\right)\sqrt{\frac{n}{k}}$$

$$=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

۱۰ نمره

$$\left[u=\sqrt{x}\ ,\ du=\frac{1}{۲\sqrt{x}}\right]=-۴\int_0^1\ln u\,du$$

[چون انتگرال ناسره است] $$=-۴\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\ln u\,du$$

$$=-۴\lim_{\varepsilon\to 0}\left(u\ln u-u\Big|_{u=\varepsilon}^{1}\right)$$

$$=-۴\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1-\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon\right)$$

$$=۴$$